



HØGSKOLEN I BERGEN

SOT 535 - HAVBRUKSTEKNOLOGI

Naturlaster og Forankring

AI / Marinseksjonen
KR 11.03.99

F O R O R D

Foreliggende kompendium er på alle måter å betrakte som en foreløpig versjon. Det ble påstartet i 1998 (kap. 3 - 6), som en renskrivning av mine egne tavlenotater ifm. 1 vekttal i Havbruksteknikk. Kap. 1 og 2 har kommet til i år.

Det har blitt til under sterkt tidspress, og har ikke fått noen form for kvalitetskontroll fra annen part. Det inneholder utvilsomt en del feil, både faktiske feil og trykkfeil/regnefeil. Det er derfor med svært blandede følelser det trykkes opp. Bruk det derfor med forstand (innspill og påvisning av feil, mottas med takk).

Det skulle selvfølgelig inneholdt så mye mer. Her er, om ikke annet, et tips om støttelitteratur: *Håndbok for design og dokumentasjon av åpne merdanlegg* (Sintef-rapport, se biblioteket ved HiB).

Ketil Roaldsnes
Bergen, 06.03.99

INN H O L D

<u>Kapittel</u>	<u>Side</u>
1. INTRODUKSJON	(1)1-2
2. ANLEGGSTYPER	(2)1
2.1 DE FØRSTE	1
2.2 STIVE/LEDDETE STÅLANLEGG	4
2.2.1 Pontongtypen	6
2.2.2 Flottørtypen	7
2.2.3 Katamarantypen	8
2.3 FLEKSIBLE ANLEGG	10
2.3.1 Flytekrager av plast	10
2.3 HAVMERD	12
2.4.1 Bridgestone-merden	13
2.4.2 Strekkstagsmerd	14
2.4.3 Nedsenkbar merd	16
2.5 LUKKEDE ANLEGG	17
2.6 PROBLEMSTILLINGER VED ANSKAFFELSE AV ANLEGG	18
3. VINDKREFTER	(3)1
3.1 VINDSTATISTIKK	1
3.1.1 Vindhastighetsfordeling	2
3.1.2 Karakteristisk vindhastighet	3
3.1.3 Vindretningsfordelinger	4
3.2 VINDHASTIGHETSPROFILET	4
3.3 VINDLAST	6
3.3.1 På volumer	6
3.3.2 På skjermer	7
3.4 DIMENSJONERENDE VINDLAST	8
3.5 EKSEMPEL	8
3.5.1 Vindlast på driftsbygning	8
3.5.2 Vindlast på hoppenett	9
3.6 FORMFAKTORER (VEDLEGG)	10
4. STRØMKREFTER	(4)1
4.1 STRØM	1
4.2 STRØMSTATISTIKK	1
4.3 STRØMHASTIGHETSPROFIL	2
4.4 STRØMLAST	2
4.4.1 Gjennomstrømning (a)	3
4.4.2 Omkringstrømning (b)	4
4.4.3 Eksempel	4
4.5 OKSYGEN OG GJENNOMSTRØMNING	5
4.6 VEDLEGG	6

5. BØLGEKREFTER	(5)1
5.1 BØLGEDANNELSE	1
5.2 BØLGEMÅLING	2
5.3 SIGNIFIKANT BØLGEHØYDE	3
5.4 LANGTIDSSTATISTIKK	4
5.5 H_s OG T_z ESTIMERT FRA VIND	6
5.5.1 Eksempel	8
5.6 LINEÆR BØLGETEORI	10
5.6.1 Bølgeprofilen	12
5.6.1.1 <i>Eksempel</i>	13
5.6.2 Partikkelbevegelser	15
5.6.2.1 <i>Dypt vann ($h > L/2$)</i>	15
5.6.2.2 <i>Endelig vanndyp ($L/20 < h < L/2$)</i>	16
5.6.2.3 <i>Grunt vann ($h < L/20$)</i>	16
5.7 BØLGEKREFTER PÅ SMÅVOLUMER	18
5.7.1 Eksempel	20
5.8 BØLGEKREFTER PÅ NØTER	22
5.9 DIMENSJONERENDE BØLGE	23
5.10 VEDLEGG	24
6. FORANKRING	(6)1
6.1 TYPISK FORANKRING	1
6.2 ANKRE	3
6.2.1 Drag-anker	3
6.2.2 Tyngdeankre	3
6.2.3 Spesialankre	3
6.3 LINEKARAKTERISTIKK	4
6.3.1 Kjetting og/eller wire	4
6.3.1.1 <i>Eksempel 1 - Linekarakteristikk for wireline</i>	6
6.3.1.2 <i>Eksempel 2 - Linekarakteristikk for wireline, kjetting og bøye</i>	7
6.3.2 Fibertau	9
6.3.2.1 <i>Geometrisk stivhet</i>	9
6.3.2.2 <i>Elastisk stivhet</i>	12
6.4 FORSPENNING OG SYSTEMKARAKTERISTIKK	16
6.4.1 Eksempel - Systemkarakteristikk	18
6.5 EFFEKTEN AV UJEVN FORSPENNING	21
6.6 EFFEKTEN AV FEILPLASSERTE ANKRE	22
6.7 TYNGDEANKERES HOLDEKRAFT	23
6.8 VEDLEGG - ANKERTYPER	25

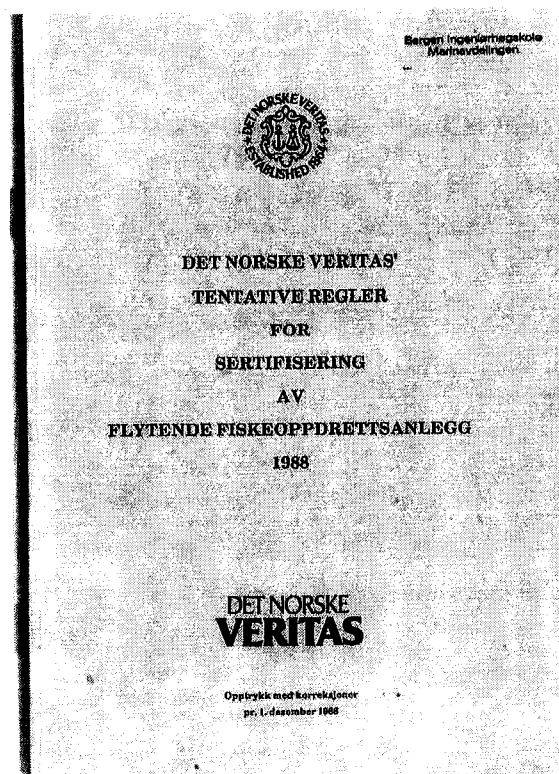
1. INTRODUKSJON

Der er mange sider ved å drive fiskeoppdrett, og mange utfordringer. Det kan se ut som at den største oppmerksomheten så langt har vært knytte til biomassen, - å holde bestanden friskest mulig, og med maksimal tilvekst.

På 80-tallet forekom en mengde havarier av anlegg. Tap av fisk, enten det skyldes havari eller hull i not, har åpenbart en økonomisk side for oppdretteren. En annen side, som ennå ingen helt kjenner konsekvensene av, er hva følgene blir av at oppdrettsfisk blander seg med villfisk.

Etter hvert har merdteknologien dermed fått større fokus. Det har vært gjort en rekke forsøk på å etablere sertifiseringsordninger som skulle bevirke at utstyr som ikke holdt mål ble luket ut av markedet. Det har imidlertid så langt ikke latt seg gjøre å komme fram til ordninger (men man nærmer seg) som både myndigheter, oppdrettere, forsikringsselskaper og utstyrsleverandører har kunnet akseptere. I hovedsak har argumentasjonen vært at ordningene er blitt for dyre for produsentene og oppdretterne.

Det norske Veritas utarbeidet i denne forbindelse et forslag til dimensjoneringsregelverk for oppdrettsanlegg (Tentative Regler for Sertifisering av Flytende Fiskeoppdrettsanlegg, 1988), som skulle danne bakgrunn for sertifisering.



Dette har aldri kommet i regulær anvendelse (men inneholder mye nyttig om dimensjoneringsprinsipper etc.). Den fremtidige ordningen vil basere seg på en typegodkjennelsesordning (som vil sette krav til dimensjonering, og produksjonskvalitet, installasjon og drift), hvor utstyr godkjennes av en nemnd som er etablert av Fiskeridirektøren. Nemnden vil vurdere utstyret utfra den dokumentasjon som foreligger i ethvert tilfelle, og evt. kreve mer dokumentasjon, som basis for godkjennelse (dette bør det skrives mer om, men ikke nå).

En merd kan klassifiseres i følgende deler:

- flytekrage
- forankringsystem
- not

Flytekragen har, som ordet antyder, som hovedoppgave å gi oppdrift. Den har normalt også som funksjon å holde merdens form, dvs. at den har funksjon som bærestruktur og må tåle belastninger fra bølger, strøm, vind og forankring. Den er normalt også basis for gangveier, som kan være kjørbare, som krever ytterligere styrke.

I dette kompendiet vil hovedfokus være på hvorledes disse tre delene i merder belastes. Det er i (altfor) liten grad gått inn på detaljerte, praktiske anbefalinger. Når det gjelder nøtene, finnes det en bransjestandard, og det kunne vært ønskelig å gå mer inn på den (etter hvert som merdene har blitt større og større, har også problemene med rømning gjennom not øket). Fagets størrelse m.m. tillater ikke dette, foreløpig.

2. ANLEGGSTYPER

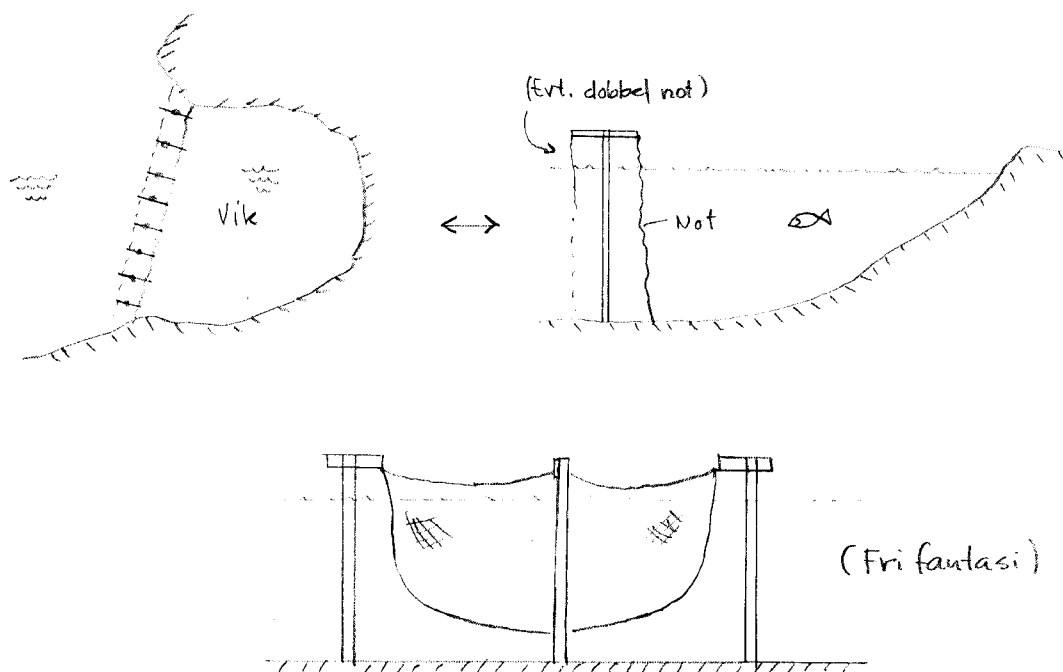
Denne presentasjonen begrenser seg til flytende anlegg, og dels også undervannsanlegg. Det er selvsagt et utall måter å utforme anlegg på. Det er umulig å beskrive alle slags varianter. Her vil vi kort forsøke å klassifisere noen av de mest vanlige typene, og bare skissere konstruksjonene slik de er oppbygget i hovedsak.

Der er mange parametre å klassifisere utfra:

- lukkede, åpne, stive, leddete, fleksible, tre, stål, plast, "offshore", "inshore"...

Den klassifiseringen som gjøres her er ikke ment å være allmengyldig.

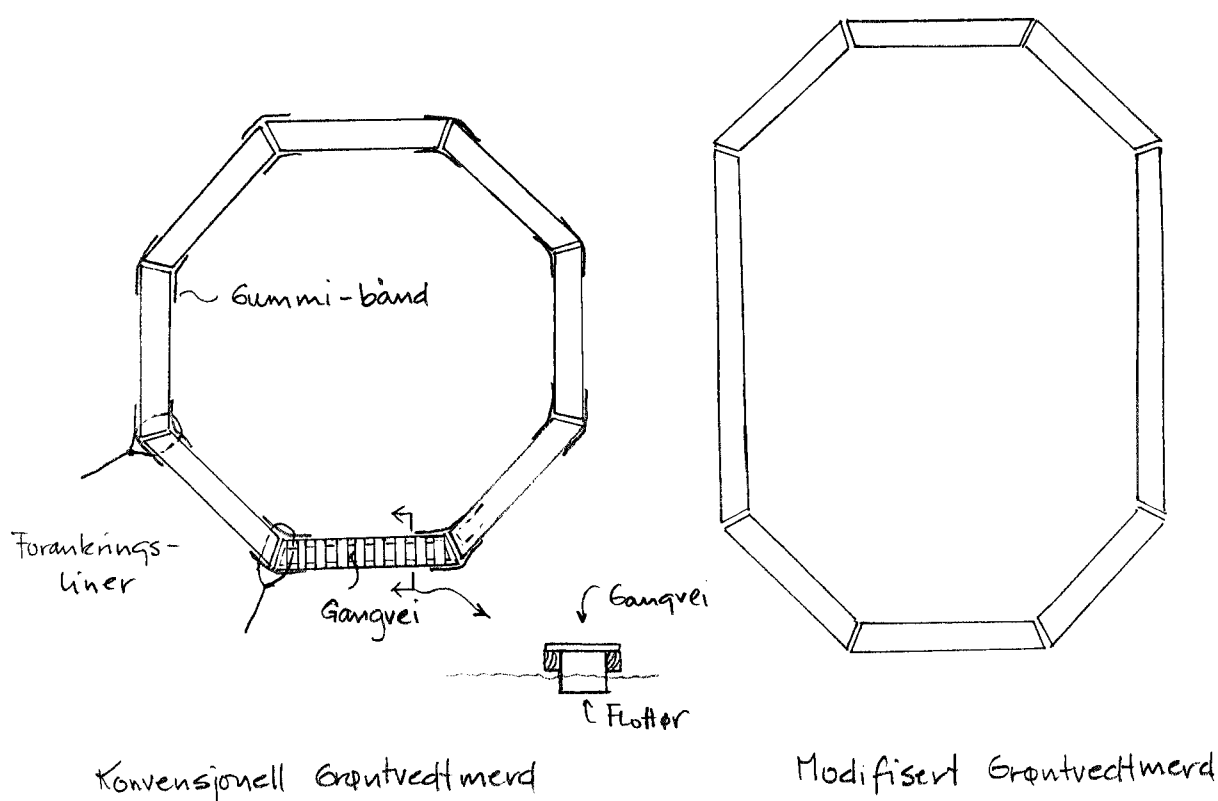
2.1 DE FØRSTE



Oppstarten til den havbruksnæringen vi har i dag, tok til på slutten av 50-tallet. De første startet med å sette ut regnbue-ørret fra Danmark. Det vakte bestyrtelse blant de danske leverandørene når det viste seg at fisken ble satt ut i sjø.

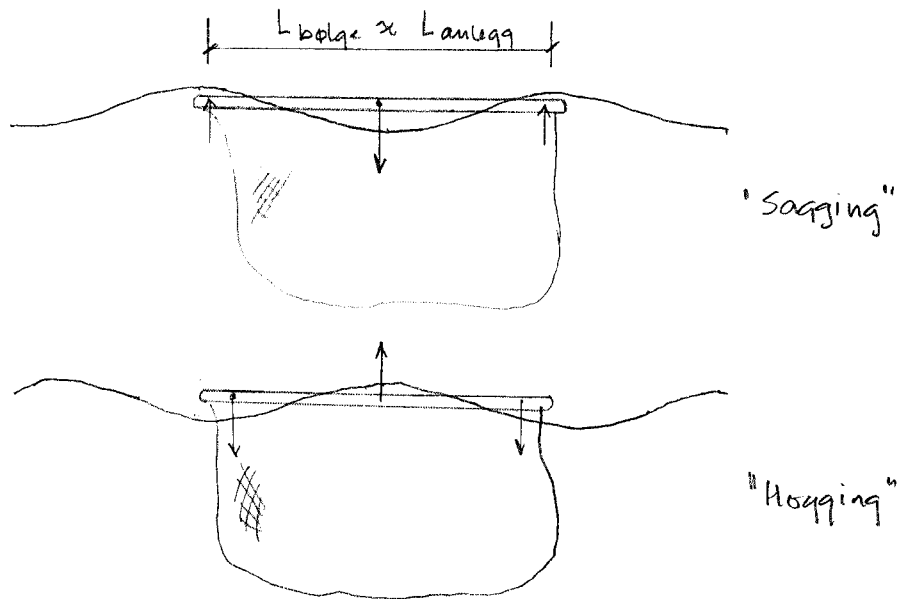
Der er sikkert flere grunner til at oppdrettere her til lands tidlig tok sjøen i bruk. Kysten er full av lune poller og vikar. Det å holde fisk i steng har vært praktisert i flere sammenhenger. De første anlegg besto av innhegninger vha. nøter, netting eller moloer, eller også merder som var opphengt på peler. "Polldriften" viste seg å ha sine svakheter (f.eks: innhegningene grodde til og ble brutt ned i dårlig vær, avfallsproblem, m.m.) og det ble eksperimentert med forskjellige slags flytende, enkeltstående merder, bestående av tre og not, med flottører.

De første merdene var beskjedne i størrelse. Rundt 1965 hadde de største et vann-linjeareal på ca. 10 m x 10 m. De ble etter hvert formet som åttekanter, for å få fisken til å svømme i sirkel. "Grøntvedtmerden" er en representant for denne typen, som det ble bygget en god del av på 70-tallet og som visst finnes den dag i dag. Denne hadde en diameter på rundt 12-13 m og en notdybde på 4-6 m (volum ca. 500 m³). Refa sin tremerd stammer også fra 70-tallet. Trerammen/gangveiene er her løftet utav vannet, og hviler på et sett flottører. Merdstørrelsen er omtrent som Grøntvedtmerden, eller noe større (omkrets 40-50 m). Den leveres fortsatt, og er noe av det "billigste og beste" som kan brukes på skjermede lokaliteter (leveres nå hovedsakelig til land hvor oppdrett i merder er nytt, og hvor lokaliteten er skjermet).



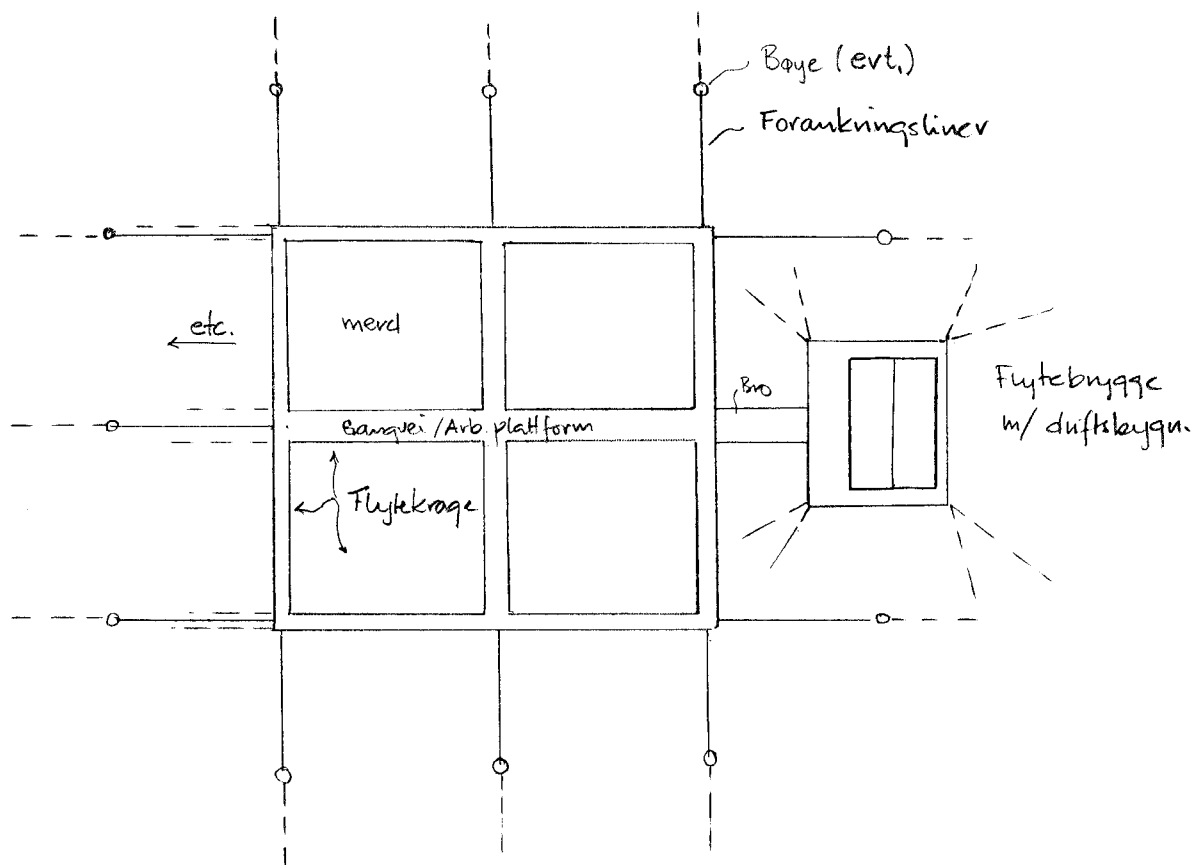
Andre typer som kom til på 70-tallet var "Tess" og "Stern" merdene. Disse var mindre enn Grøntvedtmerden, og var basert på et helt annet flyte-prinsipp, – bestående av oppdriftbøyer. Grøntvedtmerden hadde gangvei/arbeidsplattform oppå flytekragen, noe de to andre manglet. Etter alt å dømme fikk ikke de to sistnevnte den samme utbredelse som Grøntvedtmerden og Refa-merden.

Oppdrettsanleggene på 70-tallet var plassert på skjermede lokaliteter nær land. Tendensen hadde vært en økning i størrelse og fisketetthet. Behov for bedre gjennomstrømning, plass-mangel m.m. gjorde at anlegg ble utplassert på mer værutsatte lokaliteter. Her ble bølgene høyere, og bølgelengdene større. Når bølgene ble opptil lengden på merdene ble belastningen pga. "sagging" og "hogging" større enn flytekragene kunne holde, med havari, delvis eller helt, som resultat.



Selv om f. eks. Grøntvedtmerden er bygget med en viss fleksibilitet, vil den i lengden ikke kunne brukes på lokaliteter med max signifikant bølgehøyde (H_s) på over ca. 1 m (H_s er gjennomsnittshøyden av den tredjedelen av bølgene som er høyest; max. bølgen er ca. det dobbelte av H_s , her ca. 2 m, – mer om dette senere).

2.2 STIVE /LEDDETE STÅLANLEGG



Stålanleggene som etter hvert kom (80-tallet), representerer andre generasjons anleggstyper. Dette er industriproduserte anlegg med merdvolum som etter hvert kom opp i ca. 1000 m³ og vannlinjeareal på ca. 15 m x 15 m (typisk 6x2 merder med 12000 m³ til sammen). På 90-tallet har vi sett en ytterligere økning i størrelse oppimot 25 m x 25 m, med notdybder på ca. 20 m. Dette gir "stordriftsfordeler", (men det kan hende at dette er størrelser som er i overkant av det som kan kalles optimalt utfra ulike driftshensyn). Kanskje kan man her snakke om tredje generasjons anlegg.

Typisk er flere merder satt sammen i en stiv eller leddet ramme, med gode gangveier og arbeidsplattformer, gjerne med driftsbygning, eller i tilknytning til en driftsbygning på en flytende betjeningsplattform. Dette gir disse anleggene attraktive driftsegenskaper. En ulempe er at notposene blir liggende så tett at vanngjennomstrømningen, og dermed vannkvaliteten, kan bli dårlig. Dette gir til dels ugunstige vekstvilkår, økt dødelighet, og mye forurensning under anlegget. Dette er spesielt merkbart når anleggene plasseres med lengderetningen mot strømmen (sannsynligvis for å redusert kreftene på fortøyingssystemet).

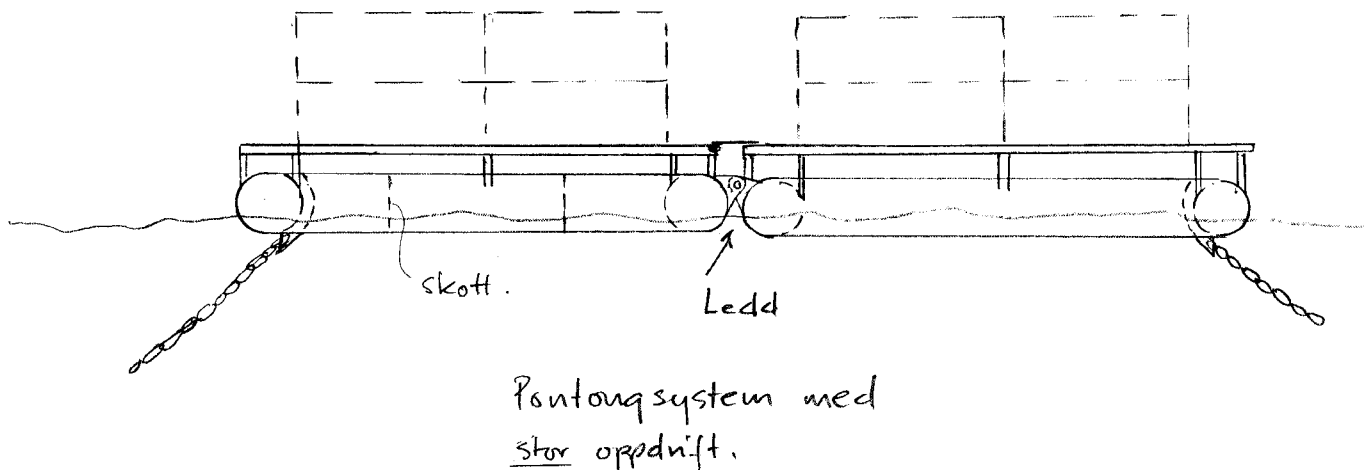
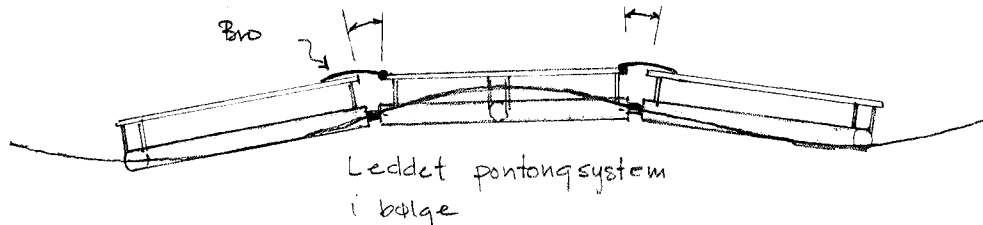
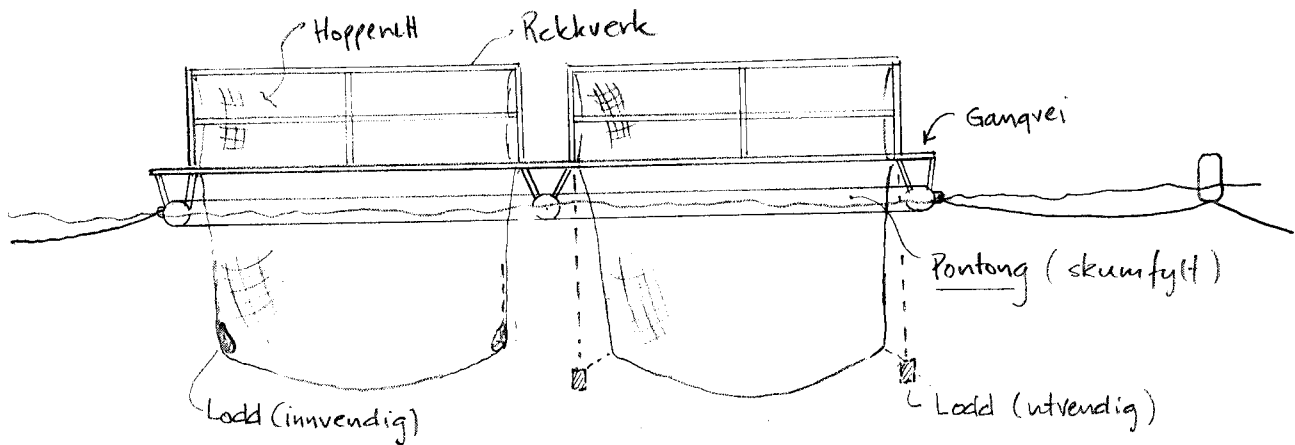
Det er ikke alltid like enkelt å integrere driftsbygning i et anlegg. Dersom vekten av hus, inkludert lagret gods, blir stor, kan dette gi ugunstige belastninger i anlegget dersom ikke oppdriften under er tilstrekkelig. Bygges en "lekter" inn i anlegget vil denne få en annen bevegelseskarakteristikk enn anlegget rundt. Dette kan gi ugunstige virkninger. Det kan være

nødvendig å oppankre driftsbygninger på egne lektere ved siden av, med en fleksibel broforbindelse til anlegget.

Til tross for at byggematerialet er av stål har denne anleggstypen begrenset styrke i bølger. Helt stive anlegg vil normalt ha begrenset utmattingslevetid på lokaliteter hvor maksimal sjøtilstand overskrider ca. $H_s = 1$ m (selvfølgelig noe avhengig av hvilke bølgelengder som opptrer, konstruksjonsutforming og dimensjoner). Om ikke de bryter sammen i de første stormene, så vil stålet etter hvert utmattes og danne sprekker. Utover 80-tallet forekom det en mengde brudd i slike anlegg, dels med havari og tap av fisk som resultat.

Som følge av dette har de fleste anleggsleverandører gått over til større eller mindre grad av hengsling. Dermed blir anleggene mer fleksible, og bestandigheten øker. Det er mulig å oppnå en tilfredsstillende levetid for slike anlegg for lokaliteter med max. H_s opptil 1.5 m - 2 m, til dels også høyere (som regel er det utmattingsproblemet som begrenser dette, og her er ikke bare maksbølgene avgjørende, men hele belastningsforløpet gjennom levetiden, og den kan være ulik fra sted til sted). Stor grad av hengsling kan forringe anleggets egenskaper som arbeidsplattform (bruk av kjøretøy), men det kommer an på hvorledes oppdriften arrangeres. Hengslene får mye "juling", og krever ettersyn og vedlikehold.

2.2.1 Pontongtypen



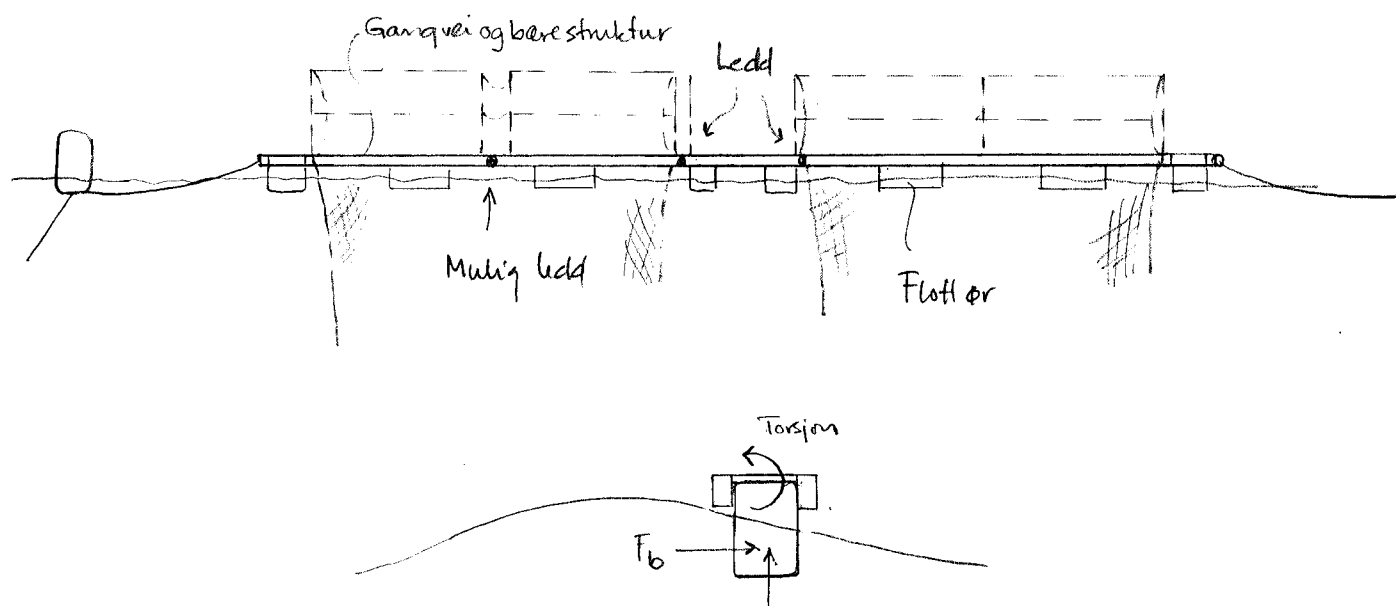
Her er flytestruktur og bærestruktur kombinert til ett. Pontongene har vanntette inndelinger vha. "vegger" (skott, i marin terminologi) med jevne mellomrom, som skal forhindre havari dersom vann trenger inn i pontongene, ved for eksempel sprekkdannelser (evt. fylles pontongene med skum, ved mindre rørdimensjoner). Gangveier er oppstøttet på pontongene. Pontongene opptar laster fra bølger, strøm og forankring. Lite av dette belaster gangveiene. Hengsling i pontongsystemet må føre til at gangveiene må forbindes med bro over hengslepunktene.

Et kontinuerlig pontongsystem kan gi relativt mye oppdrift (men tverrsnittsdimensjonene må ikke overdrives, for å unngå for stort opptak av strøm- og bølgekrefter (horisontallastene går over i forankringssystemet). Dette medfører at oppdriftsbøyer kan sløyfes i forankringen. Forankringslinene kan føres inn under anlegget (via rør), slik at de blir liggende så dypt at de ikke kommer i veien for fartøy som legger inn til merdene. Stor oppdrift muliggjør også tilpassning av driftsbygning i anlegget.

Et pontongsystem vil ha styke nok til å gjøre det egnet for slep til annen lokalitet ved algeangrep, eller lignende

Det finnes i dag produsenter som tilbyr slike anlegg med merdstørrelser opptil 25 m x 25 m. De som er tiltenkt eksponerte lokaliteter (max. H_s på 2-3 m) har en viss grad av ledning, uten at det medfører praktiske driftsproblemer.

2.2.2 Flottørtypen



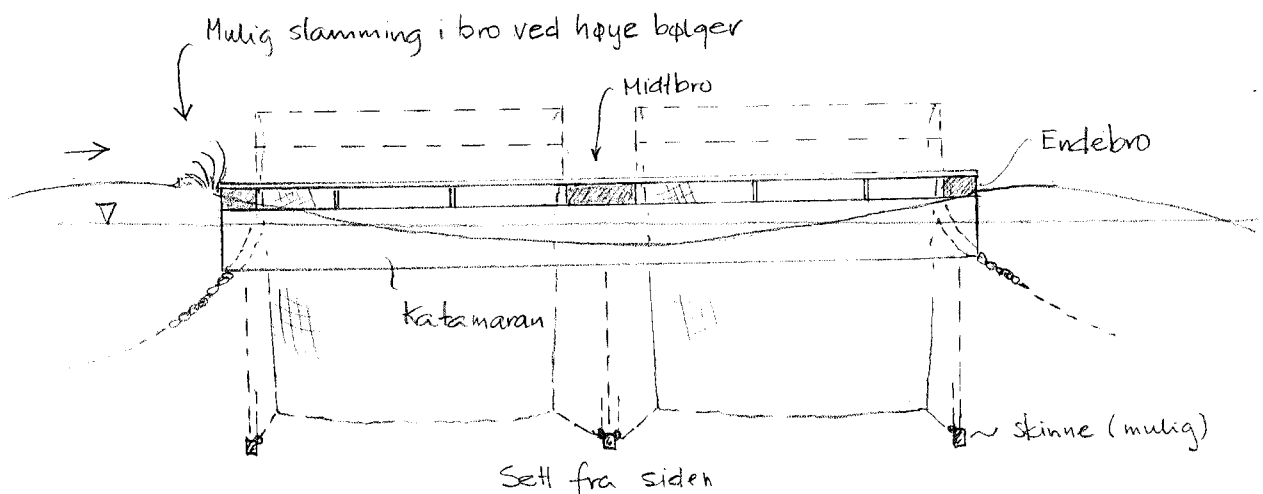
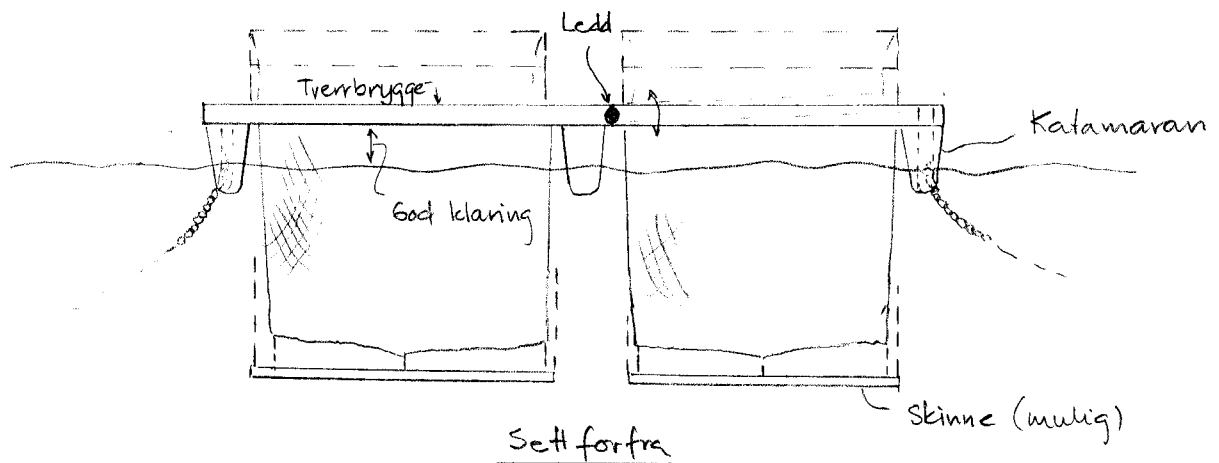
Anlegget flyter på flottører som er plassert under gangveiene med jevne mellomrom, både på langs og på tvers av anlegget. Gangveier og bærerstruktur er integrert i hverandre, og må derfor være relativt kraftig bygget, spesielt når de gjøres kjørbare. Den integrerte bærerstrukturen er likevel spinklere enn et pontongsystem, og må i tillegg oppta noe torsjon som oppstår fra bølge- og strømlaster inn mot siden av flottørene.

Dette forhindrer ikke at slike anlegg kan ha fullt tilfredsstillende levetid, men det forutsetter relativt høy grad av hengsling for å unngå for store bøyemomenter i strukturen. I Vikingmerden er lengden på "bryggene" begrenset til 12 meter. Merdstørrelsen 24 m x 24 m settes sammen av leddede 12-metringer. Denne merdtypen er har et bruksområde mht. max H_s på ca. 1.5 m.

Flytekragen har ikke spesielt stor oppdrift. Forankringen må derfor gå via oppdriftsbøyer, og evt. driftsbygning må flyte på lekter ved siden av.

Flottørene har såpass mellomrom at vanngjennomstrømningen ved overflaten (pga. strøm og bølge) ikke er forhindret. Dette er også gunstig mhp. størrelsen på kreftene som opptas i forankringssystemet.

2.2.3 Katamarantypen



Dette er en anleggstype som har kommet til på 90-tallet. I pontongtypen og flottørtypen er flytestrukturene arrangert både på langs og på tvers av anlegget. Katamarananlegget flyter på "katamaraner" som er orientert på tvers. Der er ingen flytestrukturer arrangert på tvers av katamaranenes lengderetning, men katamaranene er forbundet med broer (m/gangveier) som går i luftspenn. Fordelen med dette er at anlegget kan legges på tvers av fremtredende strøm- eller bølgeretning. Katamaranene vil yte minimal strømningsmotstand, siden de ligger med "baugen" mot sjøen. Dette er gunstig mht. kreftene i forankringssystemet. Vanngjennomstrømningen blir god.

Broene har god klaring til sjø. Dette kan ha fordeler mht. tilkomst for notskift, eller ifm. overføring av fisk til transportnot, eller brønnbåt.

I høy sjø kan det være fare for slamming (bølgeslag) oppunder broene (verst med bølgene mot "baug" og "hekk" på katamaranene). Dette kan være en begrensende faktor for hvor høy sjø et slikt anlegg kan tåle over tid. Det bygges i dag anlegg som skal tåle sjøtilstander med max H_s på opptil 3 m.)

Katamaranene har vantette skott med 5 m mellomrom for å unngå havari.

Både katamaranene og midtbroene er kjørbare. Merdene kan ha størrelser på opptil 25 m x 25 m. Konstruksjonen er solid nok til å muliggjøre slep til annen lokalitet (algeangrep el.l.).

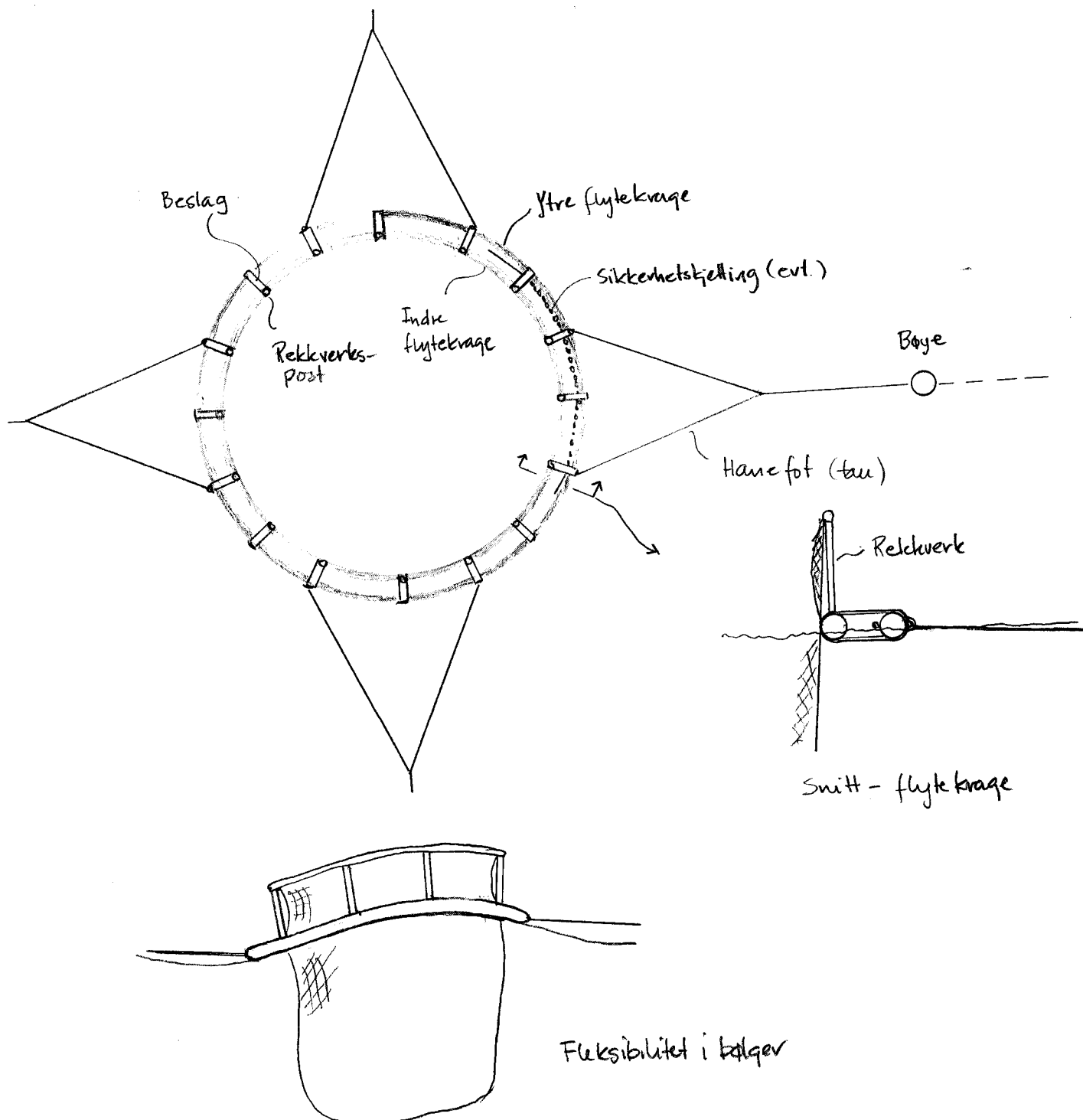
Katamarananlegg har relativt stor oppdrift, og kan derfor ha kai og driftsbygning som en integrert del av anlegget. Oppdriftsbøyer på ankerlinene er overflødig. Ankerlinene føres inn i bunnen av katamaranene gjennom rør (me arrangement for etterstramming). Linene ut fra anlegget vil ligge såpass dypt at de ikke vil komme i veien for brønnbåter e.l.

Høy oppdrift gir også mulighet for å bruke tunge skinner i underkant av nøtene, som et arrangement for å spile ut nøtene, og stabilisere dem mot å bli presset opp av strøm. Strammingen kan styres fra overflaten med tau som går gjennom blokker på skinnene (dette gjør det enkelt å trekke opp nøtene 5-6 m dersom begroning (som normalt er verst i øvre vannskikt) skal tørkes av.

2.3 FLEKSIBLE ANLEGG

Dette er i hodesak merder hvor bære- og flytestrukturen er laget av plast eller gummi, helt eller delvis. Anlegg med flytekrage av gummi omtales under kap. 2.4. Her omtales derfor bare flytekrager av plast.

2.3.1 Flytekrager av plast



Flytekragene er utformet både kvadratiske (og da med flere merder i samme ramme f.eks. 2 x 6 bur) og sirkulære (enkeltstående, eller sammensatt i systemfortøyning). Mest vanlig er den sirkulære typen (for eksempel Helgeland Plasts PolarCirkel og Aqualines Aqualine; den første PolarCirkel ble laget allerede i 1974). Disse produseres i størrelser med diametre på opptil 40 m, og med 20 m dyp not (oppimot 25000 m³).

I den sirkulære typen består flytekragen av to plastrør (hvorav minst en er fylt med flyteskum) ved siden av hverandre, sammenbundet med beslag. I Polarsirkel er praktisk talt alt laget av plast, mens Aqualine har rekkverksstøtter og beslag laget i stål. I tillegg har den en sikkerhetskjetting mellom ytre og indre flyterør. Denne skal oppta strekkreftene i flytekragen under ekstrem belastning. Flytekragens primæroppgave blir da å sørge for oppdriften.

Merdene forankres individuelt (fire eller seks liner, og hanefot), eller flere stykker i en systemfortøyning. Systemfortøyningen legges såpass dypt at foringsbåt etc. kan gå inn til merdene uten hindring. Pga. begrenset oppdrift vil oppdriftsbøyer (skumfylte) på ankerlinene være nødvendig.

Fleksible anlegg av denne typen har lang levetid, selv i områder med høy sjø (Aqualine er for eksempel typegodkjent for bølgehøyder opptil 7 m (dvs. $H_s = 3.5 - 4$ m), 2.4 knops strømhastighet, vindhastighet 30 m/s (ved notdybde 15 m)). Med visse modifikasjoner er denne typen gjort egnet for havet (se kap. 2.4).

Merdene er etter hvert blitt store, med de stordriftsfordelene det gir (men økt risiko ved havari). Ulempen mht. drift er mangel på arbeidsplattform, og den er ikke velegnet til å kombineres med brygge (Polarsirkel leveres rett nok i en utgave med brygge som spenner midt over sirkelen), - den må opereres i det store og hele fra båt.

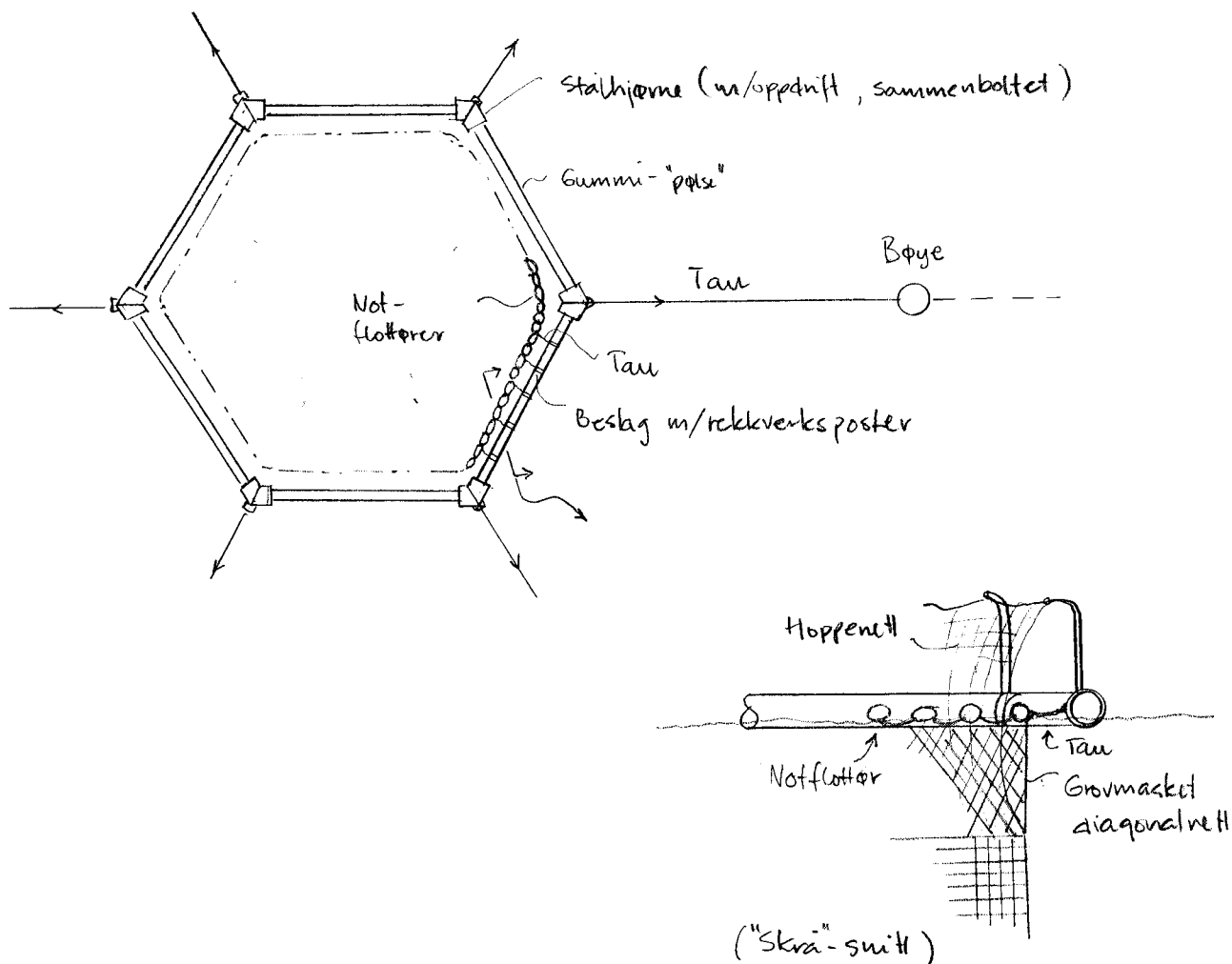
2.4 HAVMERD

Bridgestone-merden (japansk) sies å være verdens mest solgte havmerd. Siden Norge er velsignet med en skjermet kyststripe, har det til nå ikke vært nødvendig å drive oppdrett i helt åpne kyststrøk, eller på åpne havet. Det er (derfor ?) først på 90-tallet at norske produsenter har utviklet merder som er designet for oppdrett på havet.

Havmerder er merder som kan stå helt ut mot åpne havet, om ønskelig. Værekssponerte lokaliteter har generelt god vannkvalitet m.m., men gir ulemper mht. logistikk, foring og andre operasjoner ifm. driften. Dårlig vær kan hindre tilkomst i lengre perioder. Det er mer dette som er begrensende for havbruk, enn at havmerdene ikke tåler belastningene.

I mange av de vanlige "inshore" anleggene blir fisken, pga. små notposer, tvunget til å oppholde seg relativt nær overflaten. I store bølger ute på havet blir vannpartikkelbevegelsene store. Dersom fisken ikke kan søke litt dypere, blir den stresset (sjøsyk) og reduserer matinntaket, eller blir skadet mot noten (et ikke ubetydelig problem). Ved et dyp lik halve bølgelengden regnes bølgenes partikkelbevegelse å være praktisk talt lik null. Havmerder bør ha den egenskapen at fisken har rom til å søke litt ned i dypet.

2.4.1 Bridgestone-merden



Bridgestonemerden (Dunlop har kommet med et tilsvarende anlegg) har en seks- eller åttekantet flytekrage. Den er satt sammen av seks (åtte) like luftfylte "gummipølser" med flytende stålkrager i endene, som boltes sammen. I disse stive punktene går ankerlinene inn via oppdriftsbøyer. Forspenningen i forankringssystemet gjør at flytekragen står utspent i seks- eller åttekant, selv om flytekragen i hovedsak består av gummi (gummipølsene har god oppdrift selv om de skulle punktere).

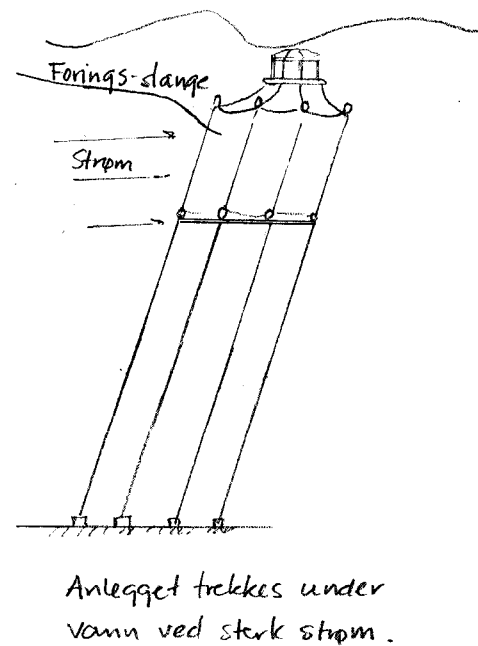
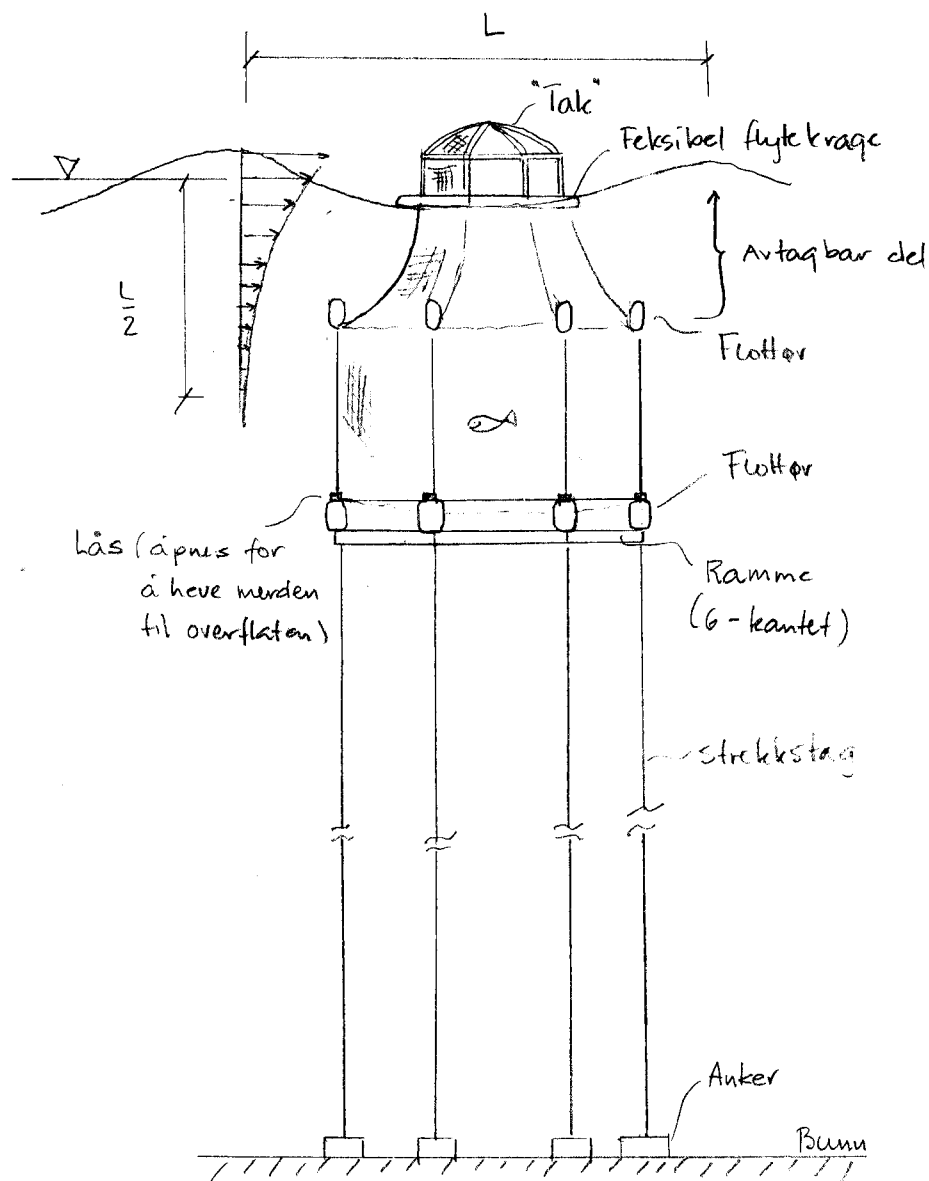
Flytekragen har i dette anlegget hovedsaklig til hensikt å spile ut noten i en tilnærmet sekskant/ åttekantform ved overflaten. Den bærer ikke selve noten, fordi den henger i en tett lenke av flottører innom flytekragen (som en snurpenot; evt. henger et predatornett på tilsvarende måte på utsiden). Lenken med flottører er festet inn mot flytekragen med tau med jevne mellomrom. Hoppenettet går fra støttene, og et stykke ned i merden (festes i notposen).

Notposen har ekstra fleksibilitet i øverste skikt. Dette oppnås ved å orientere grovmasket nett diagonalt, dvs. at trådene her går diagonalt, mens vertikalt lengre nede. Hoppenettet går ned til underkant av det grovmaskede nettet.

Totalt sett oppnås en stor grad av fleksibilitet, både i krage og not, som gjør at anlegget opptar relativt lite av bølgekraftene. Strømkraftene regnes som mer plagsomme, ved at de presser notveggene inn og opp (motvirkes selvsagt noe av lodd nederst (tilpasses forholdene)), slik at merdvolumet reduseres. Store strømhastigheter gir også store forankringskrefter.

Anlegget finnes i størrelser fra 32 m til 48 m i diameter, med opptil 20 m dype nøter, som gir et max. volum på ca. 39.000 m³, med den stordriften dette tillater.

2.4.2 Strekkstagsmerd



Denne kalles Tension Leg Cage (TLC) på engelsk, og er basert på noe av det samme prinsippet som vi kjenner fra offshore strekkstagsplattformer (Tension Leg Platforms). Denne er utviklet av Refa og Marintek. Den har en Polarsirkel flytekrage ved overflaten, med nettingtak. Noten er formet slik at fisken kan oppholde seg så dypt at den ikke blir vesentlig påvirket av partikkelbevegelsene i bølgene (partikkelbevegelsene reduseres til praktisk talt null ved et dyp lik halve bølgelengden).

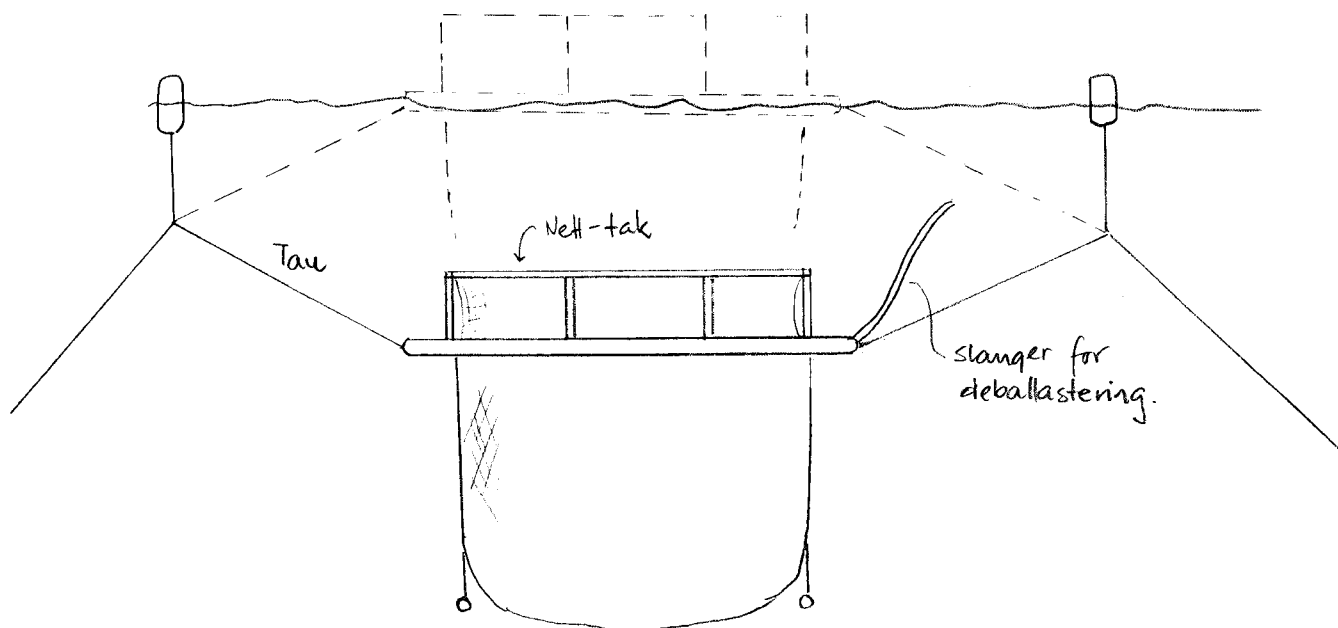
Pga. den spesielle forankringsmetoden vil merden trekkes under ved sterk strøm og høy sjø. Belastningene på både fisk og merde reduseres da i forhold til et overflateanlegg.

I uværsperioder må foring evt. foregå via slange. Merden beholder formen godt selv i relativt sterk strøm ("vanlige" merder kan ha en volumreduksjon på opptil 70 %). Spørsmålet er om merden kan være neddykket i lengre perioder, med tanke på drift, og for eksempel uttak av fisk. Merden kan løses fra den nedre rammen og heves til overflaten. "Taket" over merden, inkludert den øverste forsnevrede delen, fjernes.

Tradisjonell forankring krever svært stor plass (linene strekker seg horisontalt opptil 3-4 ganger dypet). Forankringssystemet til strekkstagsmerden har den fordelen at det tar liten plass, og kan brukes på nesten ubegrenset dyp.

Denne typen anlegg er foreløpig ikke kommet i bruk i Norge (ennå lite behov for havdrift), men er solgt en del til Middelhavsområdet og til Østen. Den er ennå ikke i bruk for oppdrett av laks, og merdevolumene er foreløpig av moderat størrelse (dette er bare et tilpassnings-spørsmål).

2.4.3 Nedsenkbar merd

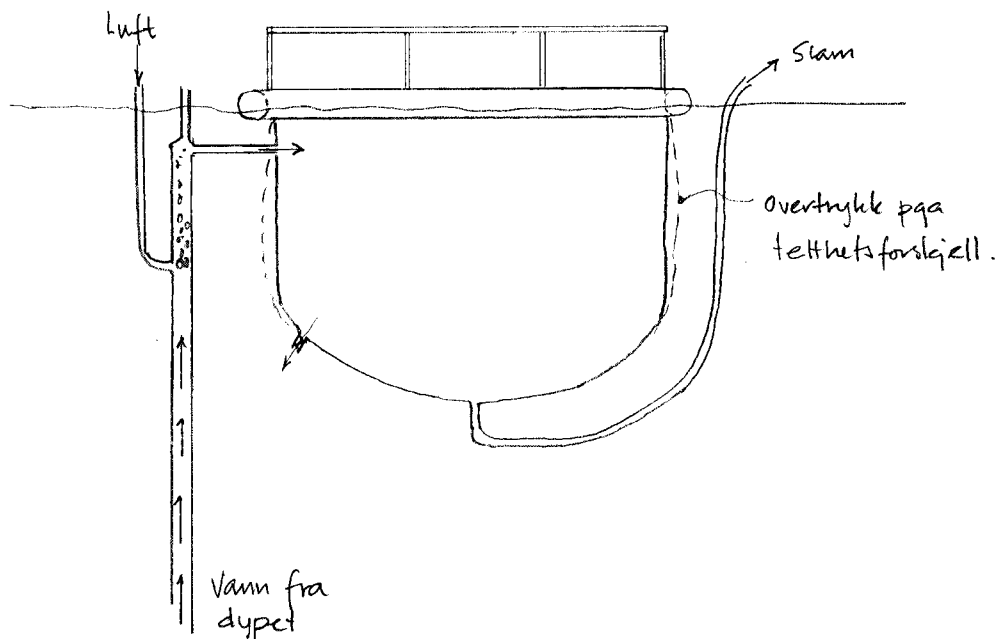


Konseptet med nedsenkbar merd er anvendt i Nedsenkbar Polarsirkel (Helgeland Plast). Den skiller seg lite fra en konvensjonell Polarsirkel. Bortsett fra nett-taket over merden, består forskjellen i hovedsak av at flytekragen kan ballasteres (derfor er ingen av flyterørene skumfylte), slik at den synker ned til ønsket nivå, - bestemt av rammefortøyningens plassering. Merden har da svakt negativ oppdrift, slik at den henger forsiktig i oppdriftsbøyene. Ved å deballastere flytekragen (pumpe luft gjennom slanger), bringes merden opp til overflaten.

Merden er ikke dimensjonert for å kunne ligge på overflaten i all slags vær. Det er meningen at den skal senkes ned når værutsiktene tilsier det. I prinsippet kan den ligge nedsenket hele tiden (unntatt under uttak av fisk m.m.), men oppdrettere ønsker helst å se anlegget sitt ved overflaten.

Fordelen med nedsenkbar merd er bl.a. at styrkekravene reduseres (siden belastningene under bølgesonen reduseres). Merden blir dermed vesentlig billigere i innkjøp. (For øvrig tyder forskning på at tilveksten av lakselus reduseres sterkt med dypet, - et argument for nedsenket drift).

2.5 LUKKEDE ANLEGG



Bruk av lukkede anlegg ble et hett tema på 80-tallet, ifm. trusselen fra giftige alger, bruk av antibiotika og kjemikalier. Fordelen med lukket anlegg er at det er mulig å ha full styring med hva som kommer inn og hva som kommer ut av merden. Det hverken påvirker miljøet rundt, eller blir påvirket (så lenge alt går som det skal). Vann kan pumpes fra et vanddyp med konstant temperatur og salinitet, fritt for lus og alger.

Dette er forhold som fortsatt har noe for seg, men lukkede anlegg på sjøen har likevel fått liten utbredelse. Dette har sikkert mange årsaker. Bl.a. har bruk av antibiotika og kjemikalier blitt dramatisk redusert. Algetrusselen har kanskje ikke fått det omfang man fryktet. Og, lukkede anlegg har en del driftsmessig negative sider. Driften krever større grad av overvåkning: hva skjer dersom vannpumpen svikter?, er oksygeninnholdet tilstrekkelig? etc.

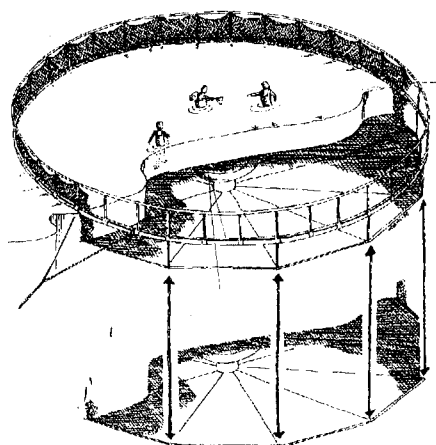
Flytekragen til lukkede anlegg krever større oppdrift. Dersom tettheten til vannet som pumpes inn fra dypet er for eksempel 1.025 kg/m^3 , mens overflatevannet er 1.010 kg/m^3 (lettere pga. regnvann, elver e.l.), vil en merd på 1000 m^3 få en ekstravekt på 15 tonn (som må opptas i flytekragen, og som ekstra strekk i merd-duken).

Både utfra investerings- og driftshensyn begrenser foreløpig lukkede anlegg seg til anvendelser som vekstbasseng når smolten settes ut i sjø, eller til oppdrettsanlegg i områder hvor man virkelig har forurensningsproblem (dvs. utenfor Norge), eller til oppdrett av andre arter enn laks, for eksempel regnbueørret. Som vekstbasseng for smolt kan man oppnå høyere temperaturer i høst og vintermånedene, og dermed få en større tilvekst før utsetting i vanlige åpne merder.

2.6 ANDRE ANLEGGSTYPER

Det finnes andre anleggstyper som det kunne være verdt å nevne, ikke minst større anlegg som det har blitt lagt en del arbeid i å utforme, men som ikke har svart til forventningene. Dette vil her føre for langt.

Til slutt skal bare nevnes at den første merd for flatfisk nå er i kommersiell produksjon (utviklet av Refa/Fiskeriforskningen). Den har en Polarsirkel flytekrage, og en 200 m² stiv nettingbunn (flatfisk må ha bunn å ligge på for å trives). Den kan senkes til 10 m dyp, og heves til overflaten med trykkluft.



(Illustrasjon: Oddvar Dahl, Fiskeriforskning)

Den nye flatbunnede merden vil tjene tre hovedformål:

- lagring av rødspette, lomre og andre arter uten svømmeblære; eksempelvis kveite og flekksteinbit.
- oppdrett av kveite og flekksteinbit.
- mottak av levende villfanget torsk, hvor flat bunn er nødvendig for at torsken skal klare å restituere seg etter fanging.

2.7 PROBLEMSTILLINGER VED ANSKAFFELSE AV ANLEGG

I en situasjon hvor man vurderer å investere i nytt anlegg, er der selvsagt et vidt spekter av forhold som må tas hensyn til. Det har å gjøre med kostnad, vedlikehold, levetid, driftsmåte, logistikk, faktorer som påvirker fiskens trivsel, forurensning av lokalitet, etc. I tillegg til dette kommer de rent fysiske naturlastparametrene som til en viss grad vil avgjøre hvilke anleggstyper som er egnet/uegnet. Dette dreier seg om forhold knyttet til:

- vindhastighet
- strømhastighet
- bølgehøyde og bølgeperiode
- dybde og bunnforhold (med tanke på forankring)

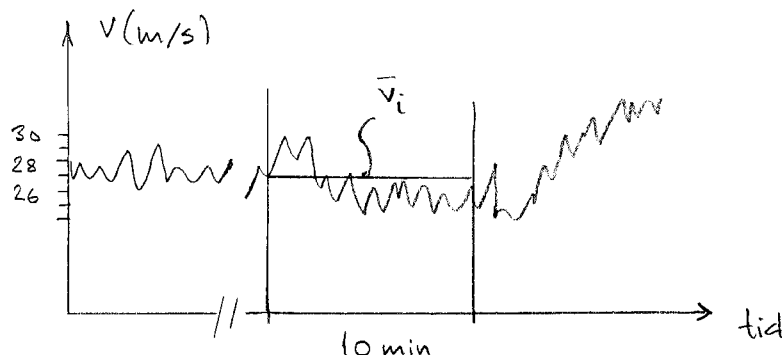
For å få greie på vindforholdene på en gitt lokalitet, kan man for eksempel henvende seg til Værvarslinga på Vestlandet. De har statistikk fra målestasjoner rundt om. Normalt kan de utfra dette gi en god nok beskrivelse av vindforholdene på de fleste lokaliteter. For (delvis) skjermete lokaliteter kan bølgehøydene og -periodene estimeres utfra vindforholdene, og utfra hvor langt og bredt område vinden får virke over (strøklengde og strøkbredde). For åpne lokaliteter kan bølgestatistikk innsamlet fra kystnære observasjonsposter (fyr) benyttes.

Strømforholdene er mer avhengig av lokale forhold, og kan kreve måling på stedet. Det finnes firmaer som leiger ut måleutstyr til dette formålet, og/eller som kan gjøre tolkning av måleresultatene (Oceanor m.m.). Forskjellige anleggsleverandører bistår også ifm. vurdering av lokaliteter, om deres anlegg vil være egnet mhp. naturlastene og mulighet for forankring etc.

I følgende kapitler skal vi se nærmere på hva naturlaster er for noe, og hva forankringskrefter er for noe, og si litt om hvorledes dette i prinsippet kan beregnes (forenklet).

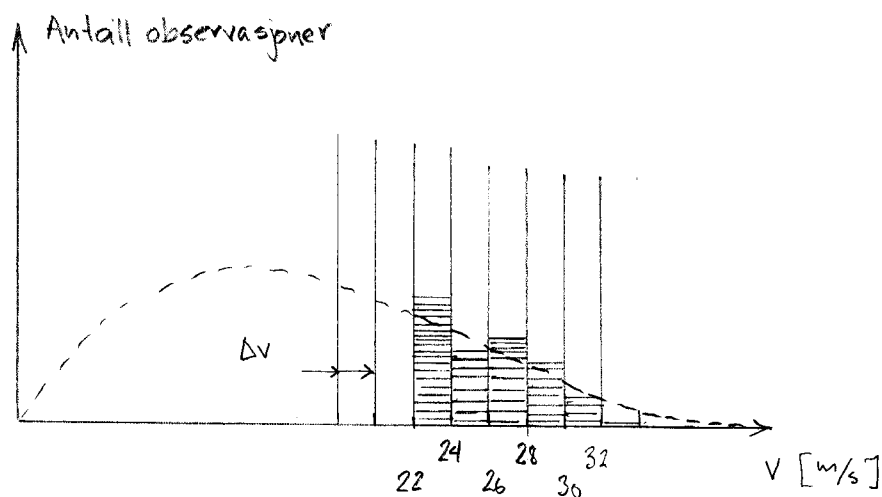
3. VINDKREFTER

3.1 VINDSTATISTIKK



Vind måles med 3 eller 6 timers mellomrom i en høyde 10 m.o.h. Vinden måles kontinuerlig over 10 min., og middelet beregnes. Det er disse verdiene som danner bakgrunnen for vindstatistikk. Vind måles på faste værstasjoner (Utsira, Hellesøy fyr, Flesland, etc.), men kan også måles på steder (i kortere perioder) hvor det vurderes å utplassere anlegg, dersom ikke statistikk fra nærliggende områder finnes.

3.1.1 Vindhastighetsfordeling



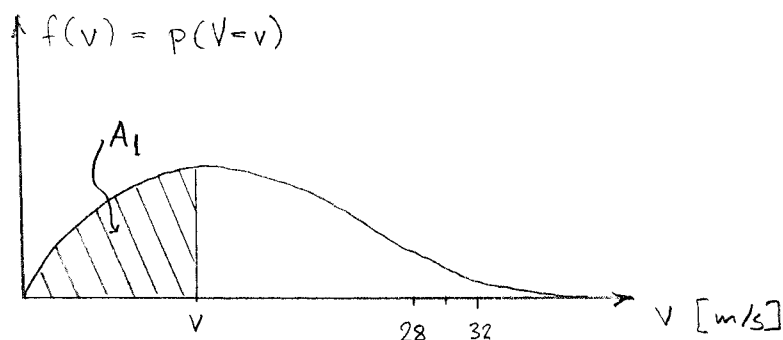
Vindhastighetsverdiene fra målinger kan grupperes i klasser med intervall f.eks $\Delta v = 2$ m/s. Da kan vi få fram en diskret fordeling (histogram). Dette er en sannsynlighetstetthetsfordeling, også kalt en frekvensfordeling, eller bare sannsynlighetfordeling.

Av forskjellige årsaker kan det være ønskelig å tilpasse en kontinuerlig fordelingsfunksjon til den diskrete fordelingen (prinsippet for dette vises i Øving 1). Blant annet kan man da finne et uttrykk for fordelingen i det området hvor måledata ikke finnes (i enden av fordelingen). Det er

3. Vindkrefter

ofte dette området som er mest interessant med tanke på verdier for dimensjoneringsformål. Vha. en fordelingsfunksjon kan man foreta en ekstrapolasjon inn i det «ukjente» området (selvfølgelig med fare for å gjøre feil, men det er da *noe*; sammen med annen viten kan dette være verdifullt).

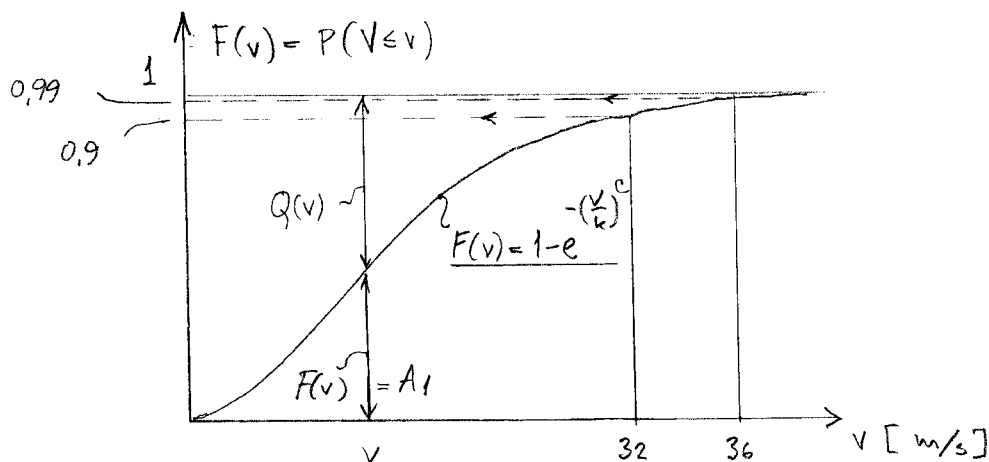
Ofte brukes Weibull fordelingsfunksjon. Den enkleste av disse har bare to parametre, som kan bestemmes fra måldata (se Øving 1). Vha. denne kan en kontinuerlig fordeling framstilles.



Den mest interessante fordelingen er den såkalte *kumulative* fordelingen (den *akkumulerer* tetthetsfordelingen). Mens tetthetsfordelingen kan si hvor stor sannsynligheten er for at vindhastigheten *er lik* en gitt verdi, sier den kumulative hvor stor sannsynligheten er for at vindhastigheten vil være *mindre enn* en gitt verdi (terskelverdi). Denne fordelingen ser ut som en «S-fordeling». Den matematiske formen er:

$$F(v) = P(V \leq v) = 1 - e^{-\left(\frac{v}{k}\right)^c}$$

- hvor: v er terskelverdien på vindhastigheten (som vi kan variere fra 0 - ?)
- k er skalafaktor
- c er formfaktor (disse to beregnes fra fordelingsens *std.* og *middel*)



Arealet A_1 i tetthetsfordelingen ser vi igjen som en ordinat i den kumulative fordelingen. Flytter vi terskelverdien helt ut i enden av fordelingen, går A_1 mot 1. Det vil si at sannsynligheten for at vindhastigheten er under terskelverdien (v) er bortimot 1 (100 %).

3. Vindkrefter

$F(v)$ gir sannsynligheten for underskridelse av vindhastigheter. Ofte er sannsynligheten for overskridelse vel så interessant. Den er $Q(v) = 1 - F(v)$. I begge tilfeller gis ofte verdiene som **sannsynlighet pr. år** for det ene eller det andre ($Q_{\text{årlig}}$). Dette leder oss inn på begrepet **returperiode**:

Anta at det er gjort 3000 målinger på et sted med 6 t mellomrom (ca. 2 år). Anta at 4 målinger er over 32 m/s. I gjennomsnitt vil da gå $\frac{3000 \cdot 6t}{4} = 4500 t$ mellom hver gang 32 m/s overskrides. Dette er det vi kaller **returperioden** for denne vindhastigheten. Den kan også beregnes på bakgrunn av sannsynlighetsverdier, slik:

$$R = \frac{\Delta t}{1 - F(v)} = \frac{\Delta t}{Q(v)} = \frac{6t}{\frac{4}{3000}} = 4500 t$$

Returperioder som er lengre enn måleserien må baseres på den tilpassede fordeling (dersom den synes å gi en brukbar tilpasning til måledata). I f.m. dimensjonering er det disse returperiodene som er interessante. Gitt at for eksempel $F(36 \text{ m/s}) = 0.9999$ fra den tilpassede Weibullfordelingen. 36 m/s har da en returperiode som er:

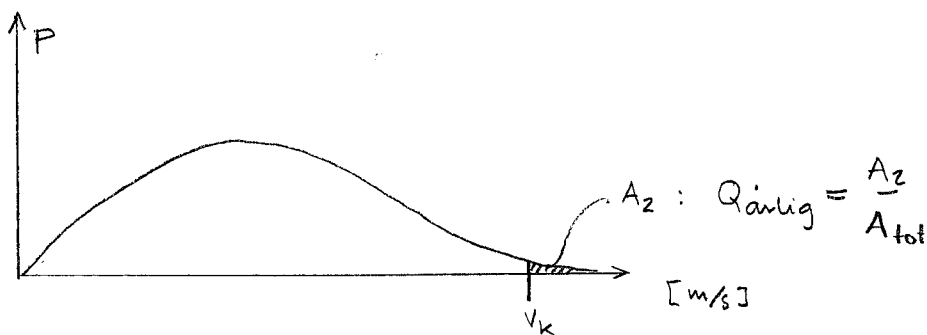
$$R = \frac{\Delta t}{1 - F(v)} = \frac{6t}{1 - 0.9999} = 60000 t = 6.85 \text{ år}$$

På denne måten kan sammenhengen mellom enhver aktuell returperiode og vindhastighet beregnes. De vanligste returperiodene i f.m. dimensjonering er 20 år, 50 år, og 100 år (avhengig av hva som dimensjoneres). Sammenhengen mellom returperiode og **sannsynlighet pr. år for overskridelse** er (i samsvar med formlene over):

$$Q_{\text{årlig}} = \frac{1 \text{ år}}{R_{\text{år}}}$$

En 100 års returperiode svarer dermed til 1% sannsynlighet pr. år for overskridelse av en gitt vindhastighet. Dvs. at etter 100 år er 100 % sannsynlig at hastighetene er overskredet *en* gang. (P.S: Weibullfordelinger tegnes ofte på såkalt Weibullpapir, som har logaritmiske akser; da blir fordelingen en rett linje).

3.1.2 Karakteristisk vindhastighet

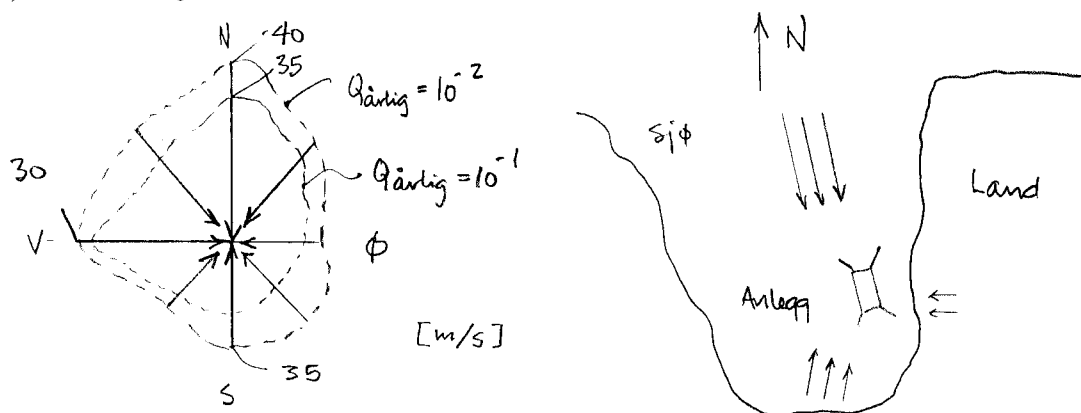


Regelverk (f.eks. DnV's «Tentative Regler for sertifisering av flytende fiskeoppdrettsanlegg») sier at dimensjonering skal baseres på såkalte karakteristiske verdier (referanseverdier for dimensjonering). For naturlastene *vind*, *strøm* og *bølger* er disse verdiene definert ved årlig sannsynlighet for overskridelse. Vindhastigheten skal normalt ha $Q_{\text{årlig}} = 1 \%$, altså en

returperiode på 100 år. Dette kan bety 30 m/s på et skjermet sted, men 40 m/s på en eksponert lokalitet (41 m/s er maks. 100 års verdi på den norske sokkelen). Det er urimelig å dimensjonere et anlegg for 40 m/s, dersom statistikken viser at 100 år verdien er 30 m/s.

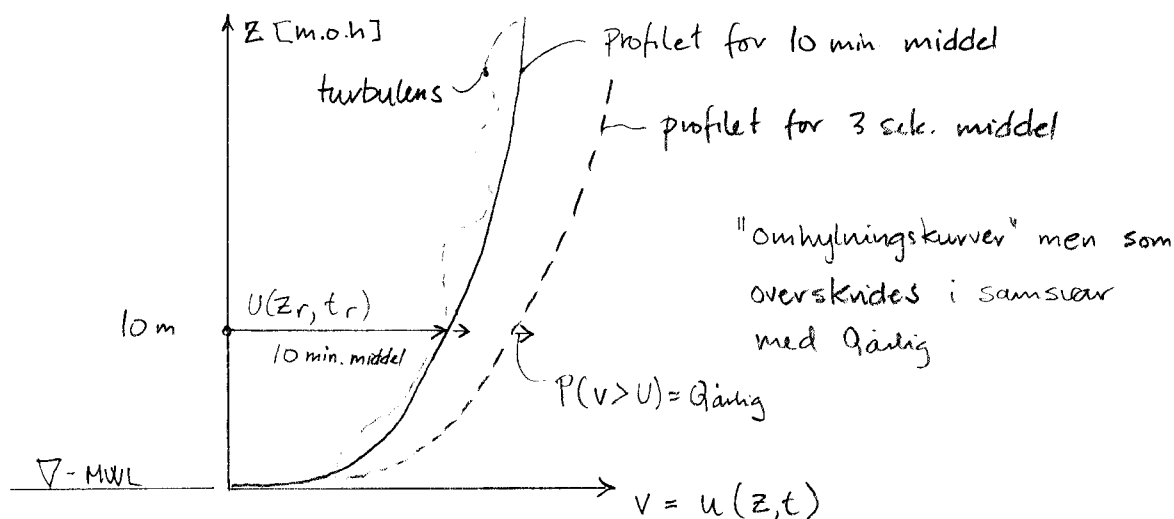
3.1.3 Vindretningsfordelinger

Vindstatistikk kan gi karakteristiske verdier fordelt på retning (i tillegg til den totale fordelingen hvor retning sees bort fra). Da snakker man om det som kalles *marginale sannsynlighetsfordelinger* (gitt vind fra nord, - hvorledes er så hastighetsfordelingen etc.). Vindens retningsavhengighet kan være nyttig å vite noe om ved utplassering av anlegg. Ved å finne den dominerende vindretningen kan man orientere anlegget gunstigst mulig (kortsider av driftsbygning mot vind, katamarananlegg med skrogene pekende mot dominerende retning. etc.). Vindretningsfordelinger visualiseres som såkalte **vindroser**.



3.2 VINDHASTIGHETSPROFILET

Vindstatistikken gir normalt verdier for 10 min. middelhastighet ved 10 m.o.h., gjerne for ulike retninger. Denne vindhastigheten kalles **referansehastigheten**. Vindvariasjonen i høyden beregnes vha. formelen for *vindhastighetsprofilet*. Pga. friksjonen mot overflaten vil vindhastigheten øke med avstanden fra overflaten.



3. Vindkrefter

Vindhastighetsprofilen er en glatt og fin kurve, men i virkeligheten inneholder vinden turbulens som gjør at vinden oppleves kast-aktig. Profilet blir å betrakte som en «omhylningskurve», som 10 min. middelvinden (evt. andre middel) bare overskrider i henhold til overskridelses-sannsynligheten.

Formelen for vindhastighetsprofilen er rent empirisk og gitt som:

$$U(z, t) = U(z_r, t_r) \left[1 + 0.137 \ln\left(\frac{z}{z_r}\right) - 0.047 \ln\left(\frac{t}{t_r}\right) \right]$$

- hvor:

$U(z_r, t_r)$ er referansehastigheten (t_r er referansemidlingstid 10 min., z_r er referansenivå, 10 m.o.h). Denne hentes fra statistikk, og er tilknyttet en eller annen sannsynlighet for overskridelse.

z er det vertikalnivå man beregner hastigheten for

t er midlingstid (min. midlingstid er 3 sek.)

Fra denne formelen kan vi beregne hvor stor vindhastigheten blir (tilnærmet) i et vilkårlig z -nivå (vertikalt), på basis av referansehastigheten. Den beregnede hastigheten vil ha samme sannsynlighet for overskridelse som referansehastigheten.

Ikke nok med det, vi kan også beregne hastigheten i kastene, ved å velge en midlingstid som er ulik $t_r = 10$ min., f.eks. $t = 15$ sek, eller $t = 3$ sek. Dermed kan vi beregne hastigheten i kastene ved et vilkårlig z -nivå, som har samme sannsynlighet for overskridelse som referansehastigheten pr. år.

Regelverkene sier at dimensjonering skal baseres på kastvind med midlingstid $t = 3$ sek. (dersom ikke konstruksjonen er svært stor). Dette gir praktisk talt den høyest mulige vindhastigheten i kastene (måleinstrumentenes treghet gjør det vanskelig å måle hurtigere variasjoner). Vindhastigheten i kastene kan vel å merke overskrides, det kommer an på hvilken returperiode som er valgt for referansehastigheten.

Eksempel: Finn middelhastigheten i kastene, 1 m, 10 m og 20 m.o.h, når midlingstiden er 3 sek. og referansehastigheten er 40 m/s (siden $t = 3$ sek. finner vi da praktisk talt den høyeste vindhastigheten i disse punktene; dersom $Q_{\text{årlig}}$ for ref.hastigheten er 10^{-2} overskrides de sannsynligvis en gang pr. 100 år.)

1 m.o.h:

$$\begin{aligned} U(1m, 3s) &= 40 \left[1 + 0.137 \ln\left(\frac{1m}{10m}\right) - 0.047 \ln\left(\frac{3s}{600s}\right) \right] \\ &= 40 \cdot 0.934 = \underline{\underline{37.4 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

3. Vindkrefter

10 m.o.h:

$$U(10m,3s) = 40[1 + 0.137 \ln(\frac{10m}{10m}) - 0.047 \ln(\frac{3s}{600s})]$$

$$= 40 \cdot 1.249 = \underline{\underline{50 \text{ m/s}}}$$

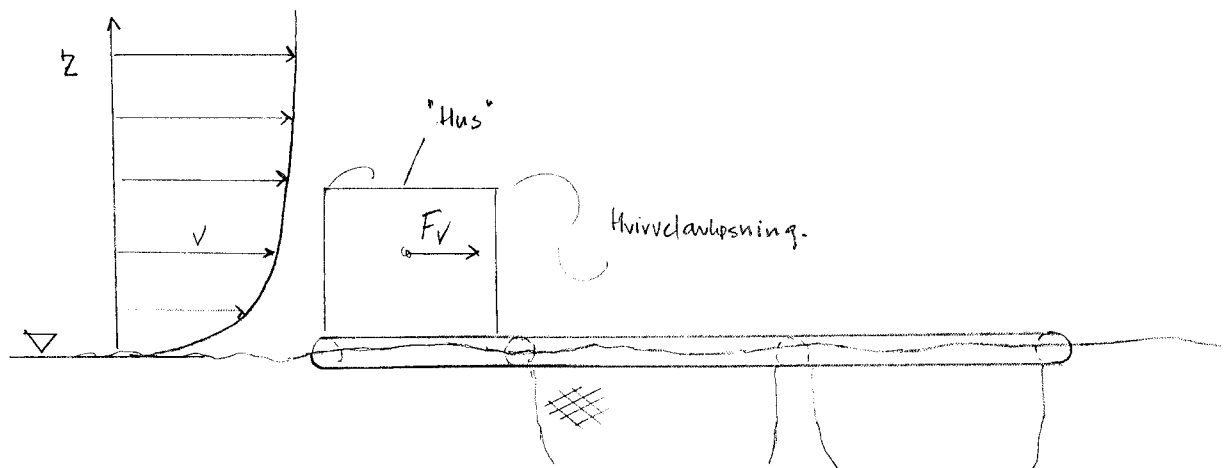
20 m.o.h:

$$U(20m,3s) = 40[1 + 0.137 \ln(\frac{20m}{10m}) - 0.047 \ln(\frac{3s}{600s})]$$

$$= 40 \cdot 1.344 = \underline{\underline{53.8 \text{ m/s}}}$$

3.3 VINDLAST

3.3.1 På volumer



Krefter på «volumer», eller tette flater, vil være avhengig av det trykket vindhastigheten øver på frontarealet, men også formen på objektet. Det siste er uttrykt ved *formfaktoren*, også kalt *drag-koeffisienten*.

Årsaken til at det virker krefter på legemer i strømming, er at trykket på for- og bakside blir ulik, pga. hvirvlene som oppstår bak legemet. Legemets form har stor betydning for hvirveldannelsene. Det er dette formfaktoren uttrykker.

Hvirvelavløsningen er generelt avhengig av strømningshastighet, eller mer presist - Reynolds tall (R_n eller R_e). For legemer med skarpe hjørner, er denne avhengigheten lite synlig, fordi kantene fungerer som «spoilere», slik at hvirvelavløsningen skjer fra de samme stedene tilnærmet uansett hastighet. Formfaktorene blir dermed praktisk talt uavhengige av hastigheten.

Avrundede former som rør, har ikke naturlige spoilere (du har kanskje sett høye skorsteiner av stål som har påsveist spiralformede finner, - dette er spoilere for hvirvelavløsning). Hvorledes hvirvlene avløses er svært avhengig av hastigheten. Formfaktorene får en sterk avhengighet til R_n .

Noen formfaktorer fra DnV's regelverk er vedlagt. Som det fremgår der det kun for rør (og delvis sfærer) at formfaktorene er gitt som funksjon av R_n .

Vindlasten (karakteristisk verdi) beregnes som:

$$F_v = C \frac{1}{2} \rho v^2 A = C \cdot q \cdot A$$

- hvor:

C er formfaktor (funnet fra forsøk - gitt i oppslagsverk og regelverk)

q kalles hastighetstrykket ($= \frac{1}{2} \rho v^2$)

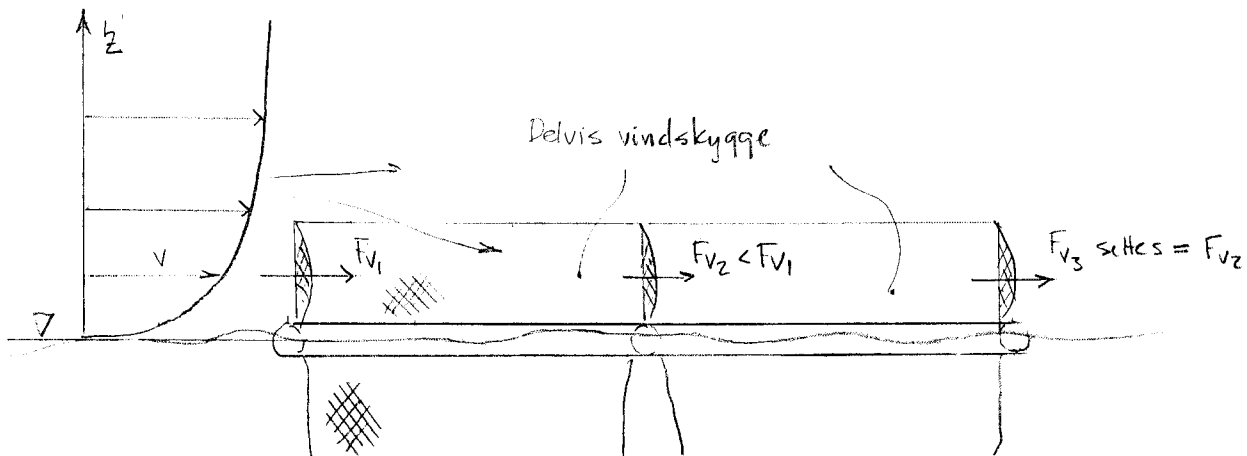
v = U(z,t) fra hastighetsprofilen. Et passende z-nivå velges, sammen med midlingstid som regelverk anbefaler. Ofte bør t = 3 sek. brukes.

ρ er luftens tetthet (1.225 kg/m³)

A er projisert areal mot vindretning (vi forutsetter her at legemet ikke er en skråstilt flate, - men kan inneholde skråstilte flater dersom C tar hensyn til det)

3.3.2 På skjermer

Skjerm er her bare et ord for en flate som ikke er helt vindtett. Dette har vi i oppdrettsanlegg f.eks. ifm. hoppenett. Ved ising kan disse tettes kraftig og pådra seg merkbare vindkrefter.



Beregningen er i prinsippet mye lik det vi så over. Når flere nett står bak hverandre, blir kraften på nettene redusert bakover pga. skyggeeffekt. Fra regelverk kan vi finne hvorledes denne reduksjonen kan foretas. Det er vanlig å redusere kraften bare etter første nett.

Kraften på en skjerm kan beregnes som:

$$F_v = C_e \frac{1}{2} \rho v^2 A \phi = C_e \cdot q \cdot A \cdot \phi$$

Her er alt som over, bare at:

$\phi = \frac{A_e}{A} \leq 1$ er «gjentettingsgraden» (solidity ratio), som er forholdet mellom det virkelige eksponerte arealet A_e , og omhylningsarealet A

C_e kalles effektiv formfaktor, og er avhengig av størrelsen på ϕ

3.4 DIMENSJONERNEDE VINDLAST

Vindlasten som beregnet over, er en såkalt karakteristisk vindlast, fordi den er basert på en karakteristisk hastighet (dvs. en hastighet spesifisert utfra overskridelses-sannsynlighet).

Den lasten som skal brukes ifm. dimensjonering skal i tillegg økes med en lastkoeffisient. Dette er en (u)sikkerhetsfaktor som skal ta hensyn til diverse usikkerheter ifm. lastberegninger.

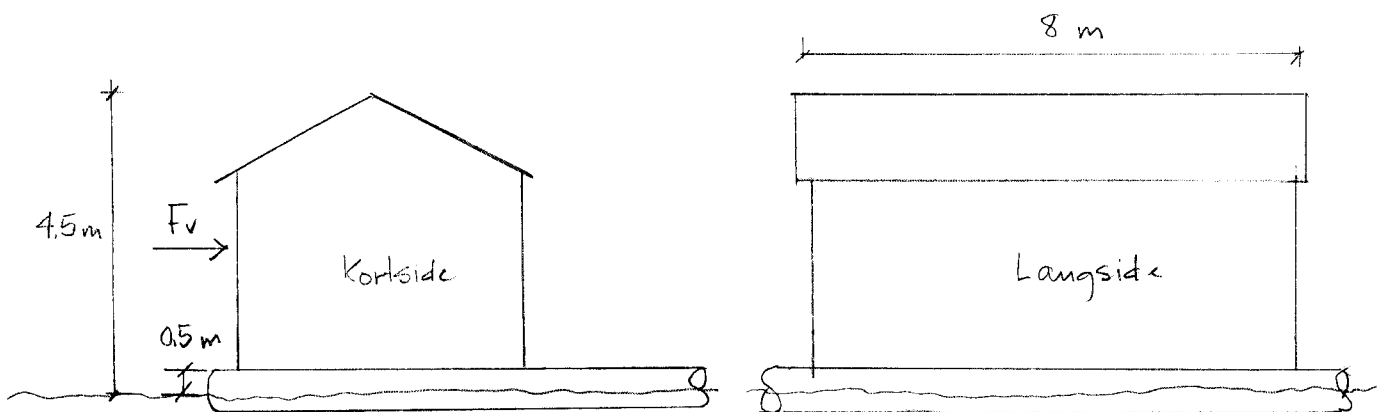
Dimensjonerende vindlast beregnes som:

$$F_{vd} = 1.3 \cdot F_v$$

Når vindlasten kombineres med andre laster, kan lastkoeffisienten ha andre verdier. Angående dette henvises til DnV's «Tentative Regler for sertifisering av flytende fiskeoppdrettsanlegg».

3.5 EKSEMPLER

3.5.1 Vindlast på driftsbygning



Finn (karakteristisk) vindkraft mot siden av bygningen, gitt at 100 års vinden (fra statistikk) er $u(z_r, t_r) = 32$ m/s, og formfaktor for hele bygningen er $C = 1.3$. Baser beregningen på vindhastigheten ved $z = 2.5$ m.o.h, og midlingstid 3 sek.

- Vindhastighet:

$$\begin{aligned} U(2.5m, 3s) &= 32 \left[1 + 0.137 \ln\left(\frac{2.5m}{10m}\right) - 0.047 \ln\left(\frac{3s}{600s}\right) \right] \\ &= 32 \cdot 1.059 = \underline{33.9 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

- Hastighetstrykk:

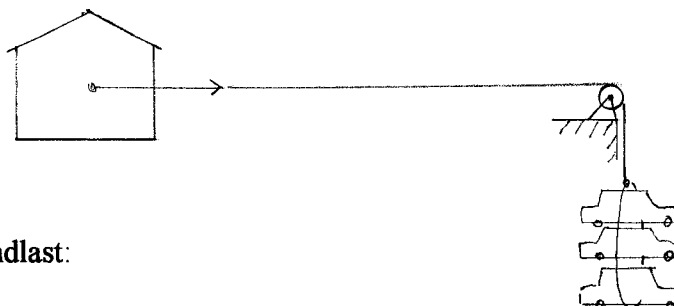
$$q = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(33.9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = \underline{703.9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}$$

3. Vindkrefter

• Vindkraft:

$$F_v = C \cdot q \cdot A = 1.3 \cdot 703.9 \frac{N}{m^2} \cdot (8m \cdot 4m) = 29282 N = \underline{\underline{29.3 kN}} \approx 2.9 \text{ tonn}$$

Dette er en kraft som tilsvarer vekten av ca. 3 biler!



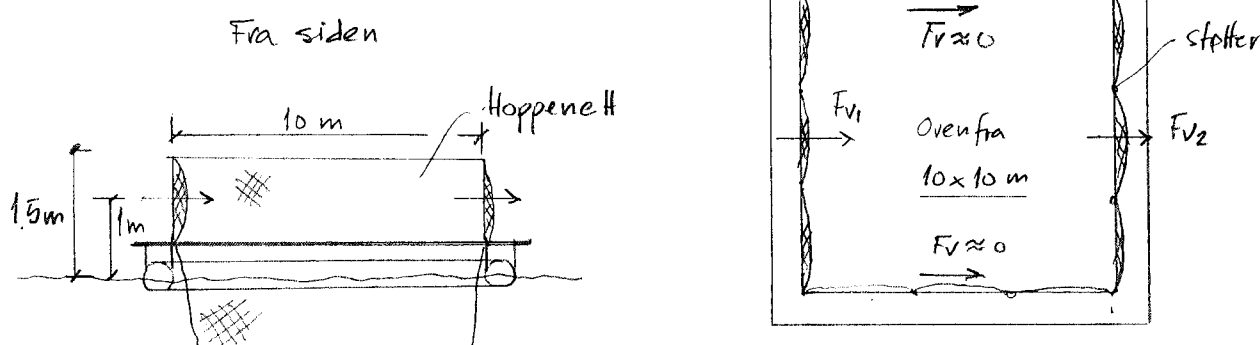
• Dimensjonerende vindlast:

$$F_{vd} = 1.3 \cdot F_v$$

Dersom vi hadde beregnet på bakgrunn av maks. 100 års verdi for den norske sokkelen (åpent hav) $u(z_r, t_r) = 41 \text{ m/s}$, ville vindlasten blitt $F_v \approx 4.8 \text{ tonn}$. Dette viser den store betydningen av størrelsen på vindhastigheten. En moderat økning i hastighet gir stort utslag, pga. den er opphøyet i andre potens.

De kreftene vi har fått kan virke store. Men vi skal ikke glemme at de vindastighetene som brukes er høyere enn vi kanskje kan klare å foretelle oss (100 års verdier). De svært få gangene vi opplever virkelig dårlig vær, blir vi slått av hvilke krefter vinden kan representere.

3.5.2 Vindlast på hoppenett



Finn (karakteristisk) vindkraft på det som er over vannflaten, gitt samme vindforhold som i forrige eksempel. Bruk vindhastigheten ved $z = 1 \text{ m}$. Anta at 40 % av arealet er gjentettet pga. ising, og at effektiv formfaktor er $C_e = 1.0$. Se bort fra skyggevirkning.

• Vindhastighet:

$$\begin{aligned} U(1m, 3s) &= 32 \left[1 + 0.137 \ln\left(\frac{1 \text{ m}}{10 \text{ m}}\right) - 0.047 \ln\left(\frac{3s}{600s}\right) \right] \\ &= 32 \cdot 0.933 = \underline{\underline{32.13 \text{ m/s}}} \end{aligned}$$

- Hastighetstrykk:

$$q = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} (32.13 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = \underline{632.3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} \quad \text{R -}$$

- Vindkraft:

Nett som ligger parallelt med vinden regnes ikke å oppta last. Last på fremste nett:

$$F_{v1} = C_e \cdot q \cdot A \cdot \phi = 1.0 \cdot 632.3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (10\text{m} \cdot 1.5\text{m}) \cdot 0.4 = 3.79 \text{ kN} \approx 0.38 \text{ tonn}$$

Ser vi bort fra reduksjon av vindhastighet fra første til andre nett, får vi totalt:

$$F_v = F_{v1} + F_{v2} = 2 \cdot F_{v1} = 2 \cdot 3.79 \text{ kN} = \underline{\underline{7.58 \text{ kN}}} \approx 0.76 \text{ tonn}$$

Hadde vi regnet utfra max. referansehastighet (41 m/s), ville vi ha fått:

$$F_v(41 \text{ m/s}) = 11.0 \text{ kN} \quad - \text{ igjen en vesentlig økning.}$$

- Dimensjonerende vindlast:

$$F_{vd} = 1.3 \cdot F_v$$

Kreftene på hoppenettene er vesentlig mindre enn på driftsbygningen, dels fordi arealet er mindre, dels fordi det ikke er tett, og dels fordi det ligger nær overflaten ($\Rightarrow$ lavere vindhastighet). Men, har vi flere merder isammen, slik at vi får mange nett etter hverandre kan kreftene fort bli store.

3.6 FORMFAKTORER (VEDLEGG)

Dette er hentet fra DnV Classification Notes 30.5: Environmental Conditions and Environmental Loads, og er å betrakte som orienterende stoff (Table 5.2 - 5.5, Fig. 6.2)

Table 5.2 Shape coefficients C_∞ for various members of infinite length.

Table 5.12 Shape coefficients C_{∞} for various members of infinite length

α	C_{fn}	C_{ft}	C_{fn}	C_{ft}	C_{fn}	C_{ft}	C_{fn}	C_{ft}	C_{fn}	C_{ft}	C_{fn}	C_{ft}
0°	+1.9	+0.95	+1.8	+1.8	+1.75	+0.1	+1.6	0	+2.0	0	+2.05	0
45°	+1.8	+0.8	+2.1	+1.8	+0.85	+0.85	+1.5	-0.1	+1.2	+0.9	+1.85	+0.6
90°	+2.0	+1.7	-1.9	-1.0	+0.1	+1.75	-0.95	+0.7	-1.6	+2.15	0	+0.6
135°	-1.8	+0.1	-2.0	+0.3	-0.75	+0.75	-0.5	+1.05	-1.1	+2.4	-1.6	+0.4
180°	-2.0	+0.1	-1.4	-1.4	-1.75	-0.1	-1.5	0	-1.7	±2.1	-1.8	0
α	C_{fn}	C_{ft}	C_{fn}	C_{ft}	C_{fn}	C_{ft}	C_{fn}	C_{ft}	C_{fn}	C_{ft}	C_{fn}	C_{ft}
0°	+1.4	0	+2.05	0	+1.6	0	+2.0	0	+2.1	0	+2.0	0
45°	+1.2	+1.6	+1.95	+0.6	+1.5	+1.5	+1.8	+0.1	+1.4	+0.7	+1.55	+1.55
90°	0	+2.2	0	+0.9	0	+1.9	0	+0.1	0	+0.75	0	+2.0

Note: In this table the force coefficient C_f is given in relation to the dimension j and not in relation to the effective frontal area A_e .

Note: In this table the force coefficient C_f is given in relation to the dimension j and not in relation to the effective frontal area A_e .

5.3.3 The shape coefficient C for individual members of finite length may be obtained as:

$$C = \kappa C_\infty \quad (b)$$

where

κ = the reduction factor as a function of the ratio l/d (may be taken from Table 5.3, where d = the cross-sectional dimension of a member normal to the wind direction and l = the length of the member).

Table 5.3 Values of reduction factor κ for member of finite length and slenderness. (Ref. Fig. 7.1)

l/d	2	5	10	20	40	50	100	∞
Circular cylinder, subcritical flow	0.58	0.62	0.68	0.74	0.82	0.87	0.98	1.0
Circular cylinder, supercritical flow	0.80	0.80	0.82	0.90	0.98	0.99	1.0	1.0
Flat plate perpendicular to wind	0.62	0.66	0.69	0.81	0.87	0.90	0.95	1.0

5.3.4 For members with one end abutting on to another member or a wall in such a way that free flow around that end of the member is prevented, the ratio l/d should be doubled for the purpose of determining κ . When both ends are abuted as mentioned, the shape coefficient C should be taken equal to that for an infinite long member.

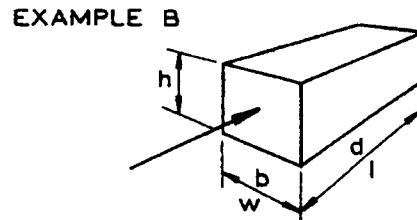
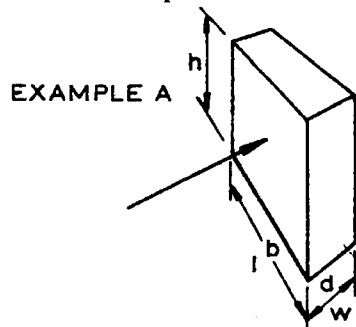
5.3.5 For spherical and parabolical structures like radar domes and antennas, the shape coefficient C may be taken from Table 5.4.

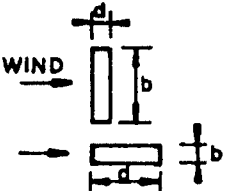
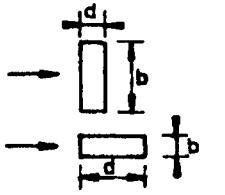
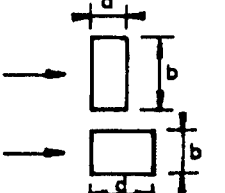
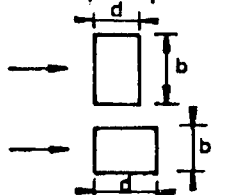
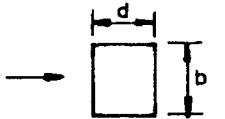
Table 5.4 Shape coefficients C for sphere-shaped structures.

	Structures	Shape coefficient	
	Hollow hemisphere, concavity to wind	1.4	
	Hollow hemisphere	0.35	
	Hollow or solid hemisphere, concavity to leeward	0.4	
	Solid hemisphere and circular disc	1.2	
	Hemisphere on horizontal plane	0.5	
	Sphere	$Re \leq 4.2 \cdot 10^5$	0.5
		$4.2 \cdot 10^5 < Re < 10^6$	0.15
		$Re \geq 10^6$	0.20

For hollow spherical cupolas with a «rise» less than the radius, one can interpolate linearly for the ratio l/r between the values for a circular disc and a hemisphere.

5.3.6 For three-dimensional bodies such as deck houses and similar structures placed on a horizontal surface, the shape coefficients may be taken from Table 5.5.

Table 5.5 Shape coefficient C_f for three-dimensional bodies placed on a horizontal surface.

Plan shape	$\frac{l}{w}$	$\frac{b}{d}$	C_f for height/breadth ratio $\frac{h}{b}$						
			Up to 1	1	2	4	6		
	≥ 4	≥ 4	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6		
		$\leq 1/4$	0.7	0.7	0.75	0.75	0.75		
	3	3	1.1	1.2	1.25	1.35	1.4		
		1/3	0.7	0.75	0.75	0.75	0.8		
	2	2	1.0	1.05	1.1	1.15	1.2		
		0.5	0.75	0.75	0.8	0.85	0.9		
	1.5	1.5	0.95	1.0	1.05	1.1	1.15		
		2/3	0.8	0.85	0.9	0.95	1.0		
Plan shape	$\frac{l}{w}$	$\frac{b}{d}$	C_f for height/breadth ratio $\frac{h}{b}$						
			Up to 0.5	1	2	4	6	10	20
	1	1	0.9	0.95	1.0	1.05	1.1	1.2	1.4

b = the dimension of the member normal to the wind.
 d = the dimension of the member measured in the direction of the wind.
 l = the greater horizontal dimension.
 w = the lesser horizontal dimension of a member.

Example A: $l = b$, $w = d$. Example B: $w = b$, $l = d$.

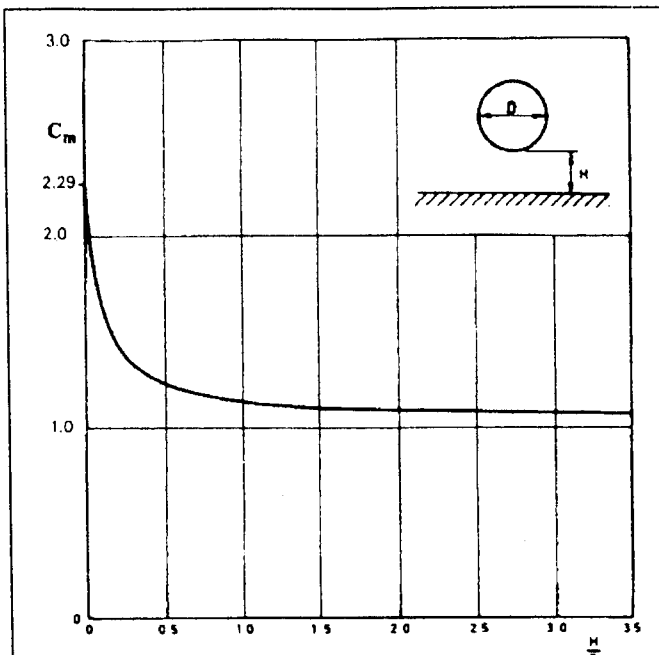


Fig. 6.1
Recommended value of the added mass coefficient, C_m for a circular cylinder.
Influence of a fixed boundary on the added mass coefficient, C_m , of a circular cylinder.

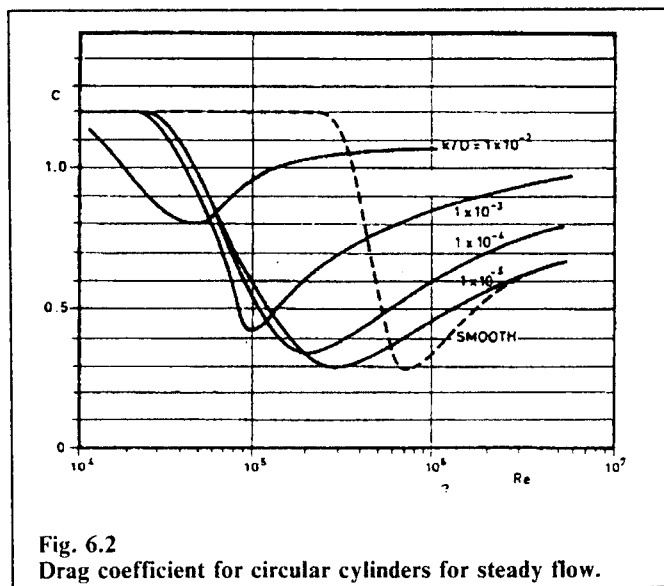


Fig. 6.2
Drag coefficient for circular cylinders for steady flow.

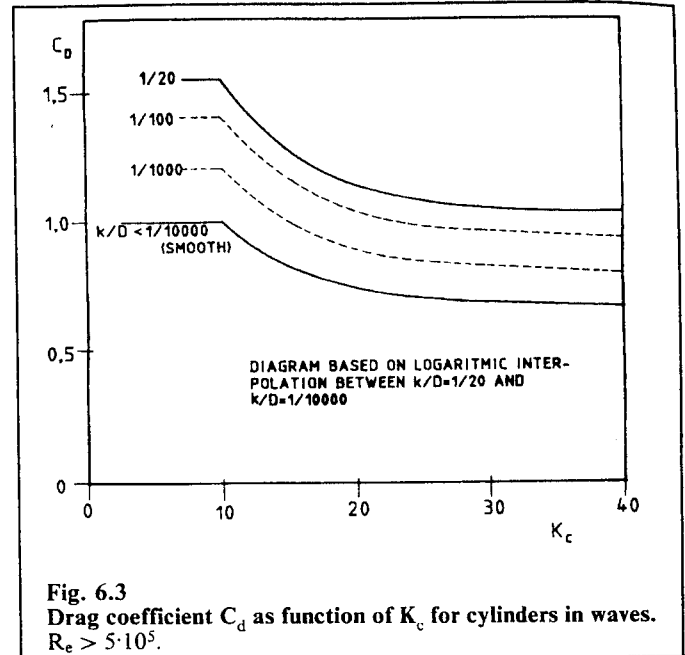


Fig. 6.3
Drag coefficient C_d as function of K_c for cylinders in waves.
 $Re > 5 \cdot 10^5$.

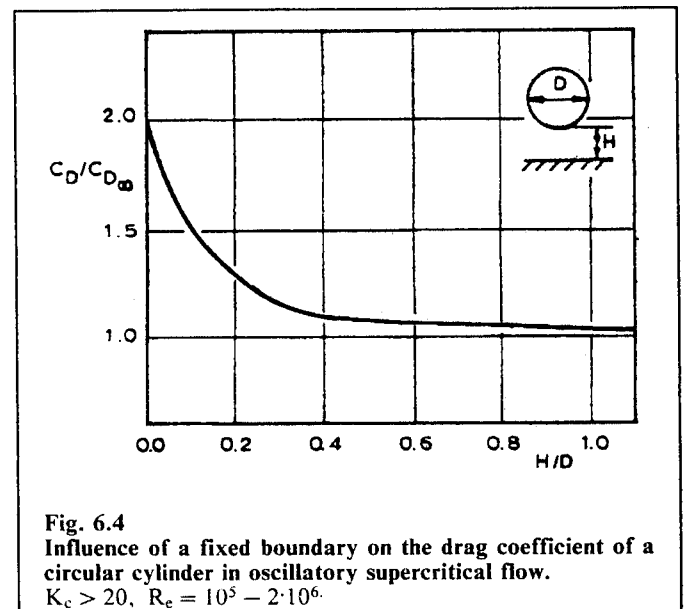


Fig. 6.4
Influence of a fixed boundary on the drag coefficient of a circular cylinder in oscillatory supercritical flow.
 $K_c > 20$, $Re = 10^5 - 2 \cdot 10^6$.

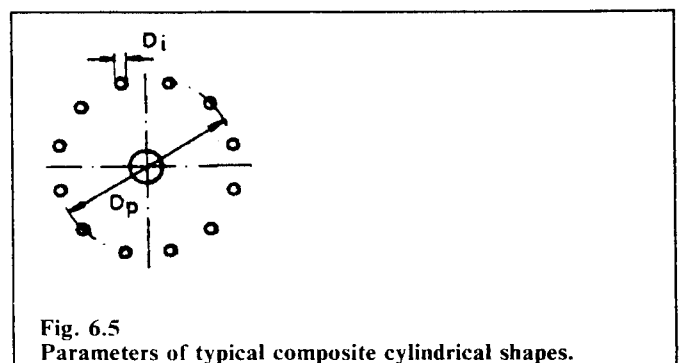


Fig. 6.5
Parameters of typical composite cylindrical shapes.

4. STRØMKREFTER

4.1 STRØM

Strøm kan ha bidrag fra ulike forhold:

- havstrøm (Golfstrømmen)
- kyststrøm
- tidevannsstrøm
- vindgenerert strøm

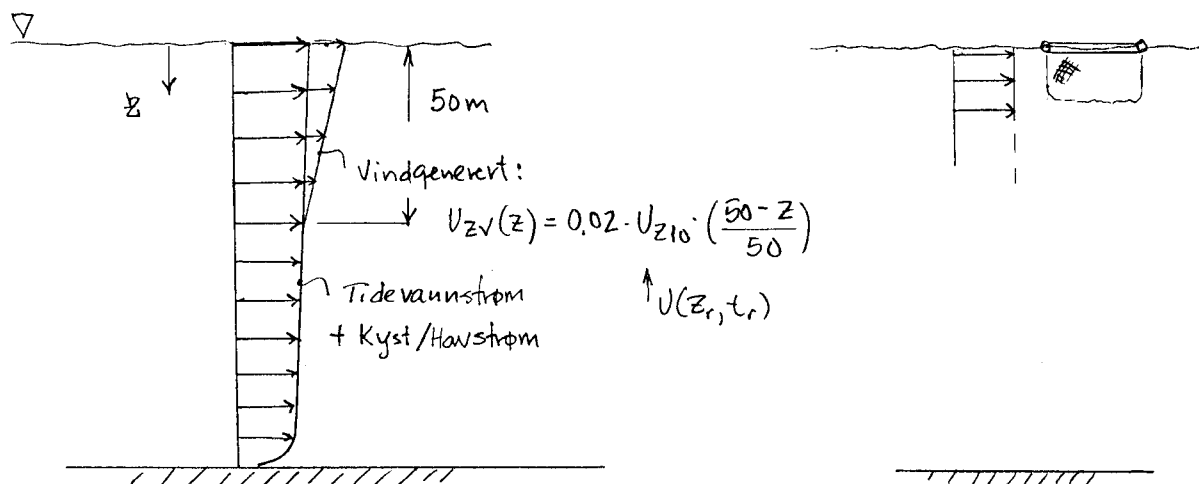
Havstrømmer har størst betydning langt til havs (se vedlagt figur). Kyststrømmer består av en blanding av vann fra Atlanteren (Golfstrømmen), Østersjøen, og vann fra land. Den kan forårsake strømhastigheter på rundt 0.5 m/s (størrelsesorden). Tidevannet kan gi i størrelsesorden strømhastigheter på 0.4 (Sør-Norge) - 0.8 m/s (Nord-Norge), avhengig av tidevanns-forskjellene (se vedlegg). Innmed land vil selvsagt lokal topografi m.m. ha stor betydning. Vindgenerert strøm (vinden «drar» med seg vann pga. friksjonen) regnes å gi strømhastigheter i øverste skikt på 2-5 % av referansehastigheten (10 min. middelvinden, 10 m.o.h.).

4.2 STRØMSTATISTIKK

Innmed land kan strøm kan ha ennå større variasjoner fra sted til sted enn vind. For å få et godt nok grunnlag for å bedømme strømforholdene er man derfor i større grad enn for vind avhengig av måling *på stedet*. For å kunne utarbeide noenlunde pålitelig statistikk vil det kreves måling over minst 30 dager. Typiske designverdier vil ligge rundt 1 m/s.

Strøm har ikke så høyfrekvente variasjoner som vind. Midlingstid er derfor ikke et relevant begrep ifm. dimensjoneringsverdier. Variasjonene følger i stor grad tidevannssyklus og årstider.

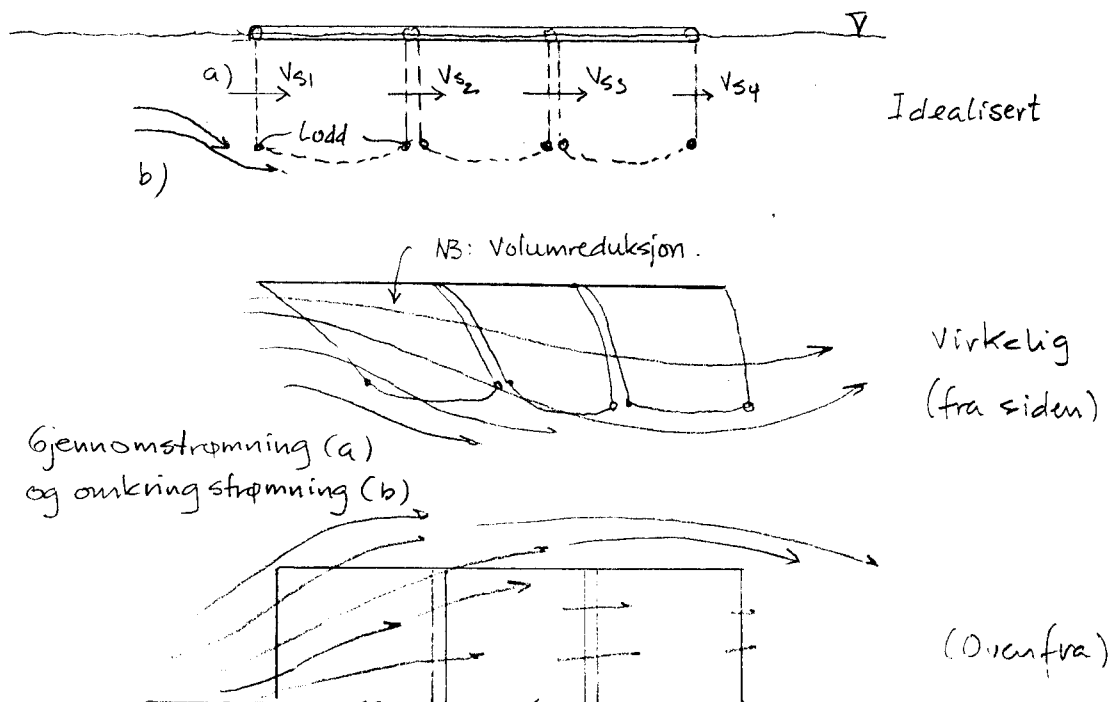
4.3 STRØMHASTIGHETSPROFIL



Som for vind har også strøm en hastighetsvariasjoner med dybden. For offshore konstruksjoner som står på havbunnen kan det ha noe for seg å beskrive variasjonen, men for oppdrettsanlegg som kun stikker ca. 10 m ned i sjøen vil strømvariasjonen over dybden være ubetydelig. Det er derfor vanlig å bruke et forenklet strømprofil som gir den samme strømhastigheten over dybden av anlegget.



4.4 STRØMLAST



4. Strømkrefter

Strømkreftene som virker på et anlegg vil dels skyldes at vannet strømmer gjennom notveggene, og dels omkring. Notlinet i seg selv vil til en viss grad forhindre gjennomstrømning og tvinge vannet utforbi nøtene. Graden av omkringstrømning vil være ulik mht. masketype og -størrelse. Med en viss grad av begroning øker denne effekten. I tillegg vil notens form spille inn. Tverrsnittet (ovenfra) kan være 4-kantet, 6-kantet, 8-kantet, sirkulært, og veggene kan være vertikale, eller skrå innover.

Det er vanlig å bruke klumpvekter eller blyliner (eller annet) i overgang bunn og vegg i nota for å forhindre at strøm presser notveggene oppover (som kan gi vesentlig volumreduksjon i merden). Store vekter vil redusere deformasjonen av nøtene, men det vil igjen medføre større opptak av strømlaster. Ønsket om liten notdeformasjon og lave strømlaster er derfor motstridende. Når man veier disse hensynene mot hverandre, skal man huske på at når man beregner strømlaster med tanke på dimensjonering, brukes 50 - eller 100 års verdier for strømhastighetene. Disse er i størrelsesorden 1 m/s, men opptrer kan hende ikke i løpet av et anleggs levetid (20 år?). Gjennomsnittshastighetene kan være så lave som 0.15 - 0.2 m/s. Det er slike hastigheter man må gå ut fra når man vurderer effekt av klumpvekter etc. Hvorledes noten står de få gangene strømhastigheten nærmer seg «maksverdi», kan ikke være bestemmende for den normale drift.

Vi skal her gjennomgå de enkleste prinsipp som tenkes kan for beregning av strømlast på nøter. Disse er kun ment å gi overslagsverdier. For beskrivelse av mer nøyaktige metoder henvises til «Håndbok for design og dokumentasjon av åpne merdanlegg» (Marintek - 94).

4.4.1 Gjennomstrøm (a)

Denne metoden svarer helt til vindlast på skjermer. Den baserer seg på en forutsetning om at vannet ikke strømmer omkring i det hele tatt, men bare igjennom. Veggene antas å stå vertikalt uansett strømhastighet, slik at det projiserte arealet mot strømrretningen forblir uendret. Notvegger som ligger parallelt med strømrretningen antas ikke å oppta krefter. Dette er selvfølgelig grove forenklinger. Reduksjonen av strømningshastigheten kan tas hensyn til ved en «skyggefaktor», etter nøyaktig samme prinsipp som for vindlast på skjermer. Notas «gjentettingsgrad», eller soliditet, kan inkludere effekten av begroning.

Forenklet beregnes da karakteristisk strømlast på fremste notvegg som:

$$F_{s1} = C_e \frac{1}{2} \rho v_s^2 A \phi \quad - \rho = 1025 \text{ kg/m}^3$$

Kraft på hver etterfølgende notvegg kan i prinsippet beregnes som:

$$F_{s2...} = \eta \cdot F_{s1} \quad - \text{hvor } \eta \text{ er skyggefaktor, som vil avhenge av soliditeten}$$

Vi skal ikke komme spesielt inn på hvorledes størrelsen på skyggefaktoren kan velges. Dette vil uansett være et stort usikkerhetsmoment. I forbindelse med vindlast på skjermer anbefaler

regelverk (DnV) å redusere kraften kun fra første til andre skjerm, men ikke fra andre til tredje etc. I denne sammenhengen er dette også svært usikkert.

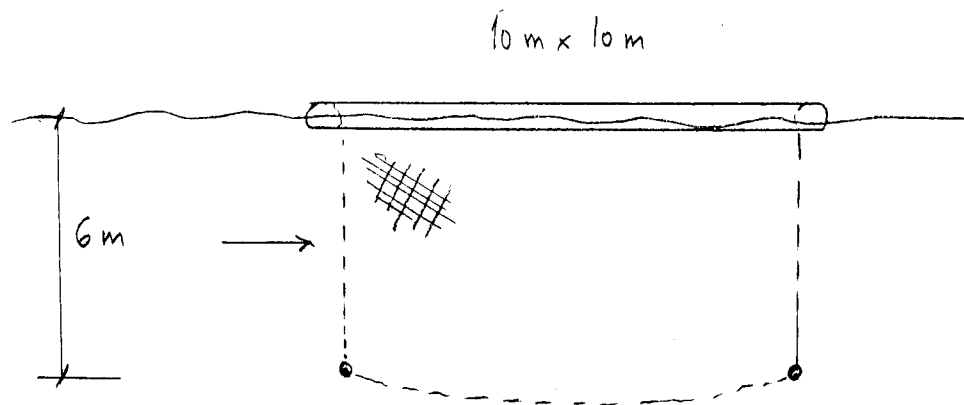
4.4.2 Omkringstrøm (b)

Dette tilsvarer helt vindlast på volumer. Notveggene antas tette slik at vannet blir tvunget til å strømme rundt anlegget. Det projiserte arealet mot strømmen antas upåvirket av strømhastigheten. Dette er også grove forenklinger.

Karakteristisk strømlast på hele anlegget beregnes som:

$$F_s = C \frac{1}{2} \rho v_s^2 A$$

4.4.3 Eksempel



Beregn strømkraften på merden over, basert på begge de forenklede metodene (a og b).

Projisert areal mot strømreringen ved null strøm er 6 m x 10 m. Anta at $v_s = 1.0$ m/s (100 års verdi), og at soliditeten (gjennettingsgraden) er 30 % inkludert begroing. Anta en skyggefaktor mellom første og andre notvegg på 0.8. Koeffisientene antas $C = 1.1$ og $C_e = 1.0$.

a) Gjennomstrøm: $F_{s1} = C_e \frac{1}{2} \rho v_s^2 A \phi$; $F_{s2} = \eta \cdot F_{s1}$

$$F_{s1} = 1.0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1025 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \cdot 1^2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]^2 \cdot (6 \cdot 10) [\text{m}^2] \cdot 0.3 = 9225 \text{ N}$$

$$F_s = F_{s1} + F_{s2} = (1 + 0.8) F_{s1} = 1.8 \cdot 9225 = 16605 \text{ N} = \underline{\underline{16.6 \text{ kN}}} \quad (\approx 1.7 \text{ tonn})$$

$$F_{sd} = 1.3 \cdot F_s$$

b) Omkringstrøm:
$$F_s = C \frac{1}{2} \rho v_s^2 A$$

$$F_s = 1.1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1025 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \cdot 1^2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]^2 \cdot (6 \cdot 10) [\text{m}^2] = 33825 \text{ N} = \underline{\underline{33.8 \text{ kN}}} \quad (\approx 3.4 \text{ tonn})$$

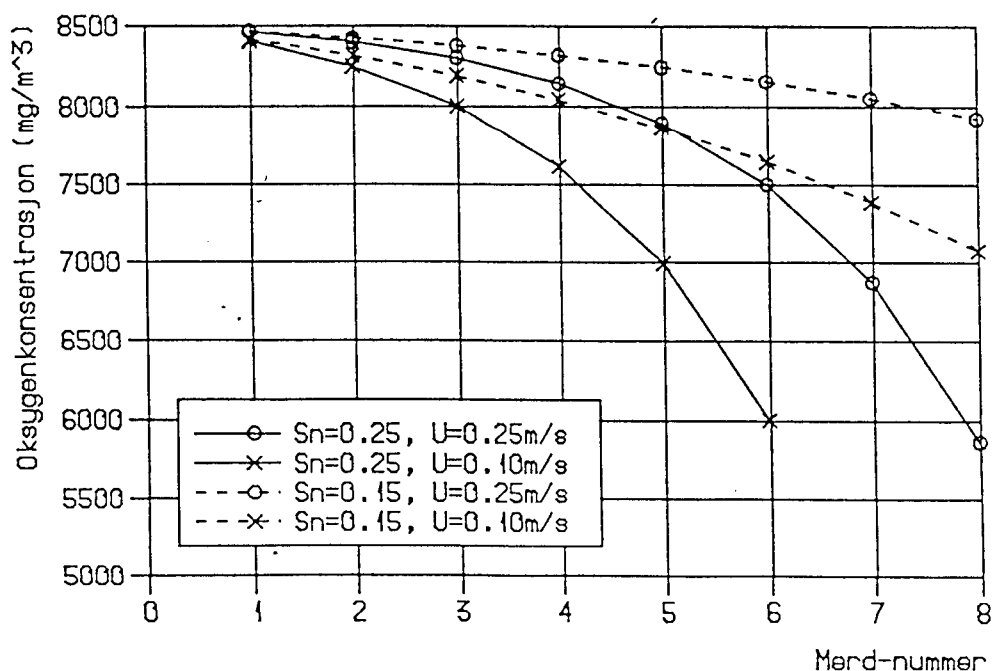
$$F_{sd} = 1.3 \cdot F_s$$

Vi ser at resultatene er ganske forskjellige. «Sannheten» vil sannsynligvis ligge lavere enn begge, eller kanskje imellom. Ved flere merder etter hverandre et det grunn til å tro at a) vil komme til å overestimere kraften (kommer litt an på hvorledes skyggevirkningen tas hensyn til), mens b) vil komme til å underestimere kraften (om ikke C økes).

Ved å sammenligne disse kreftene med de vi beregnet for vind, har vi grunn til å tro at strømkrefter er dominerende av de statiske lastene (vind og strøm), og at det vil gjelde både for store og små anlegg. Mer nøyaktige beregninger, og erfaring forøvrig, viser det samme. For store anlegg kan strømkreftene påføre anlegget og forankringsystemet svært store krefter, om ikke antall liner svarer til antall merder.

4.5 OKSYGEN OG GJENNOMSTRØMNING

Vann som strømmer gjennom flere merder etterhverandre vil få redusert vannkvalitet etterhvert. Fisken vil forbruke oksygen fra vannet, og forskjellige avfallstoffer tilføres. Figuren under viser beregning av oksygenreduksjon som funksjon av antall merder etterhverandre, to ulike soliditetsforhold (S_n) i nøtene, og to ulike strømhastigheter (U). Merdstørrelsen er $10 \times 10 \times 10 \text{ m}^3$, fisketetthet antatt lik 20 kg/m^3 , og oksygenforbruk antatt lik $2.3 \text{ mg}/(\text{kg} \times \text{min})$. (Fra Håndbok for design og dokumentasjon av åpne merdanlegg).

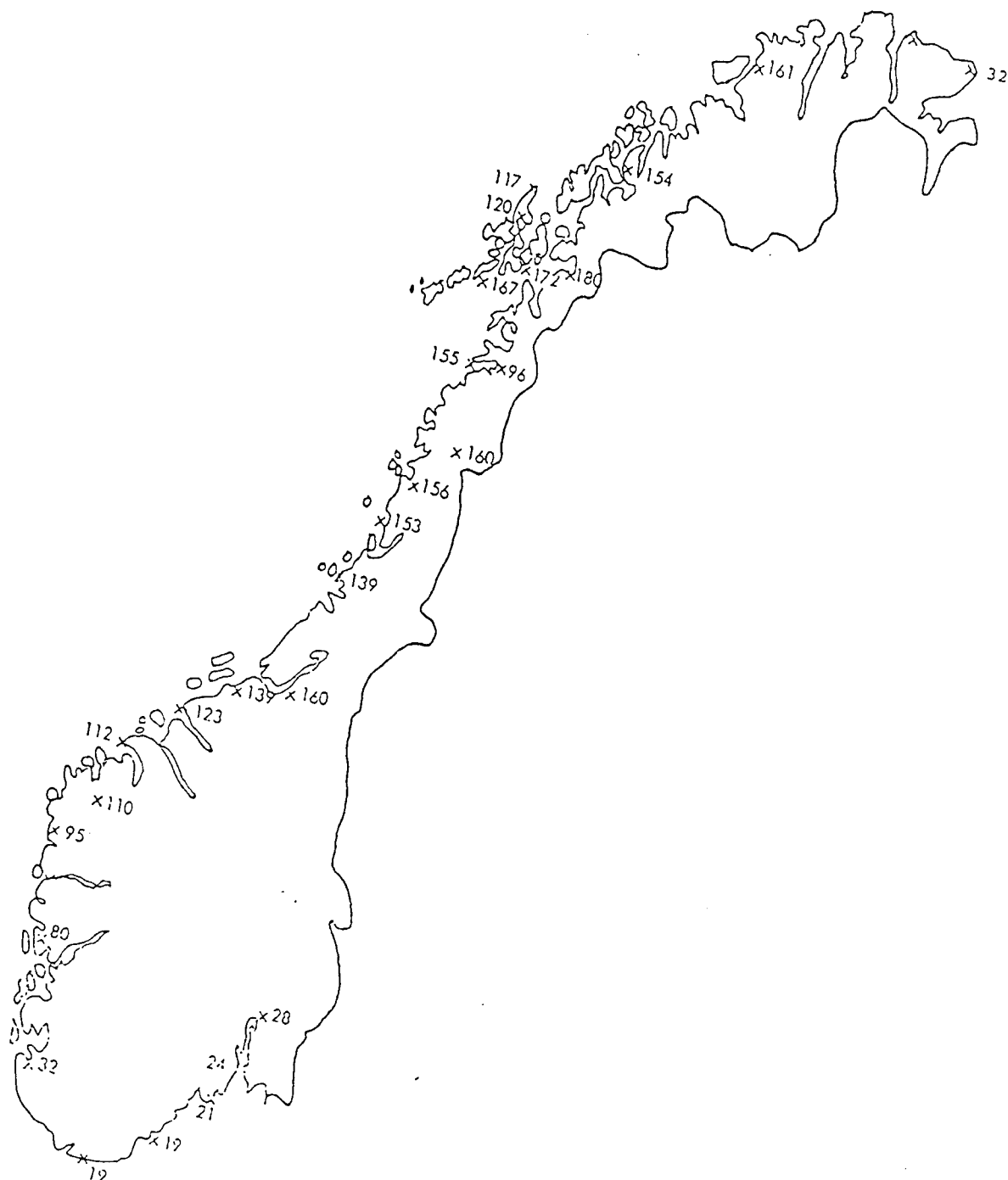


4. Strømkrefter

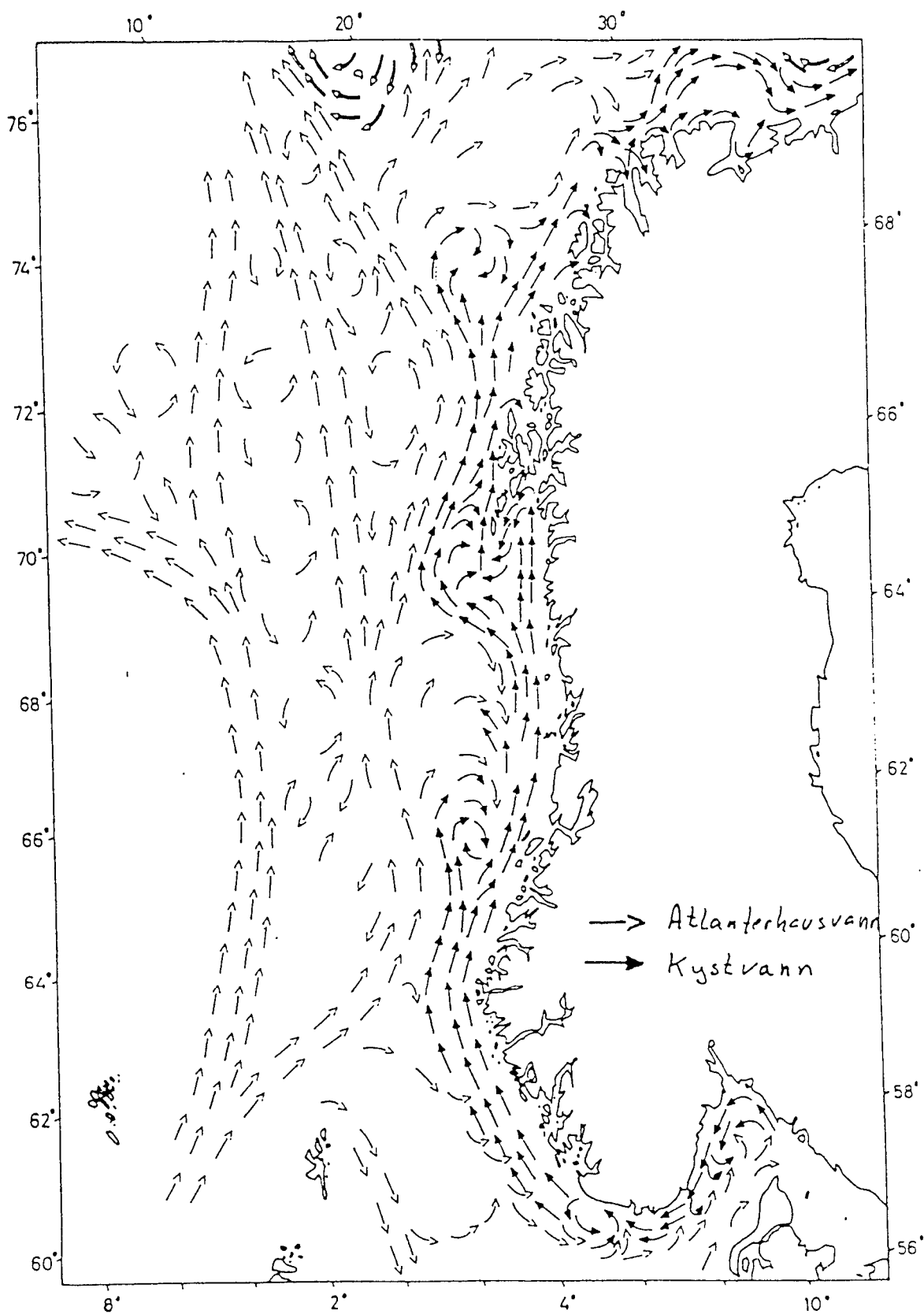
Ønsket om mange merder etterhverandre og ønsket om god vannkvalitet står således i motsetning til hverandre. Dette kan løses ved å legge langsiden mot fremherskende strømretning. Men dette kan få andre uønskede effekter, f.eks. at anlegget da normalt vil oppta større strømlast. Belastning på anlegg og forankringssystem kan bli større enn ønsket.

4.6 VEDLEGG

Vedlagte figurer er hentet fra Håndbok for design og dokumentasjon av åpne merdanlegg (Marintek -94).



Figur 3,1 Tidevannsforskjeller (i cm) langs norskekysten.



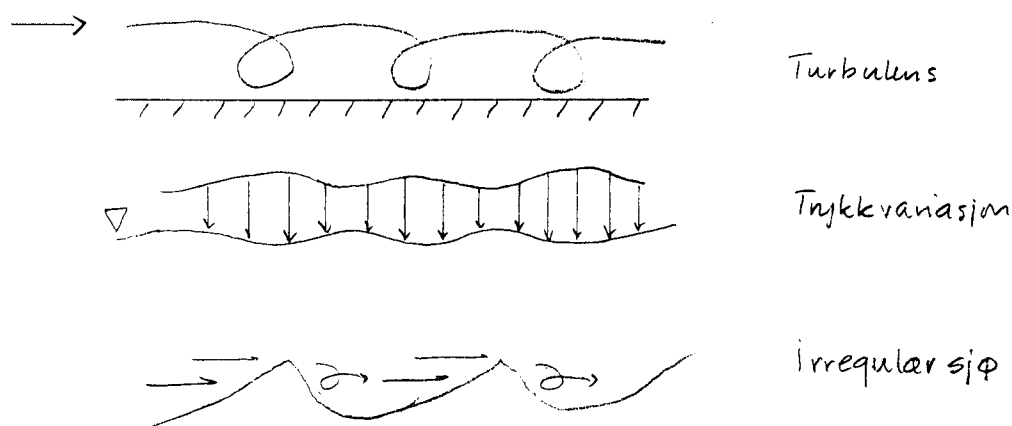
Figur 3,2 Strømsystem langs norskekysten.

5. BØLGEKREFTER

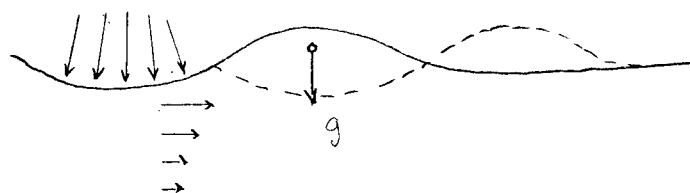
5.1 BØLGEDANNELSE

De bølgene vi observerer på sjøen/havet er generert av vind. Bølgene på et gitt sted vil bestå av en blanding av bølger generert av vinden på stedet, og bølger som er generert langt bortefra, og som har forplantet seg inn i området. De siste vil arte seg som dønningsjø, også kalt gammel sjø. Skjermede områder (fjorder o.l.) vil stort sett få de bølgene som genereres lokalt.

Vind som strømmer over vannets overflate, vil inneholde turbulens. Dette skyldes friksjonen mot overflaten. Nederste skikt stoppes mer opp enn skiktene over. Vi får en «rullende» strøm (i det som kalles et grenseskikt), som ikke lenger er homogen, dvs. at det blir hastighetsvariasjoner i luftstrømmen. Ifølge Bernoullis ligning vil der da også oppstå trykkvariasjoner. I områder med høyest trykk, vil overflaten bli presset nedover. Dermed har vi begynnelsen til en bølgedannelse. Når overflaten blir ujevn, øker tendensen til hvirveldannelser i luftstrømmen, som igjen øker trykkdifferansene, som igjen bygger opp bølger, som igjen...etc. Stadig nye trykkipulser akkumuleres i bølgene, som bygges videre opp, inntil de evt. begynner å nærme seg grensen for brytning.

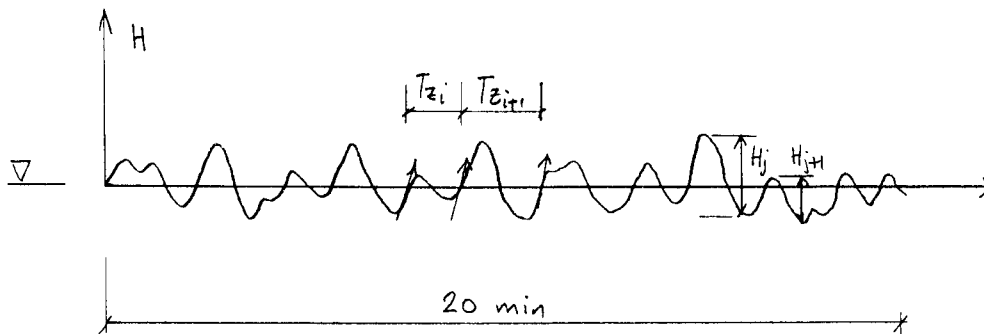


Når en bølge først er dannet, vil den ikke dø ut selv om vinden slutter å virke. Den kan forplante seg over lange avstander bare vha. gravitasjonen. Havbølger kalles derfor *gravitasjonsbølger*. De forflytter seg ved en slags dominoeffekt. Bølgetoppen trekkes ned, og blir til bølgedal. Den fortrente væskemengden «skyter» opp ved siden, i den retningen som trykkipulsen virket, som igjen trekkes ned av gravitasjonen, etc.



5.2 BØLGEMÅLING

Måling av bølgehøyder har pågått i mange år. Først ble dette gjort visuelt fra «værskip» og fyr. Etterhvert er det tatt i bruk bøyer, radere og satellitter. Fra flere av oljeinstallasjonene er det gjort kontinuerlige målinger i mange år. Målingene gjøres normalt i intervall på 20 min. hver 3'dje time. Måledataene (såkalte tidsserier) analyseres i land vha. datamaskin for å hente ut interessante statistiske størrelser. Et 20 min. måleintervall kan se ut i prinsippet som vist under. Dette kalles en *korttids sjøtilstand*. Da er tidsintervallet så kort at tilstanden er *stasjonær*, dvs. at middelerdi etc. ikke endrer seg. En slik tilstand kan vare fra minutter til noen timer.



At bølgene krysser stillevannsnivået oppover, kalles *nulloppekryssing*. Tiden mellom hver nulloppekryssing kalles nulloppekryssingsperiode. Denne tidsperioden kan variere fra bølge til bølge, på samme måte som at bølgehøyden varierer fra bølge til bølge. Tas gjennomsnittet av alle nulloppekryssingsperioder iløpet av de 20 minuttene, får man *midlere nulloppekryssingsperiode*, T_z (z for «zero»). Dette er en parameter som sier noe om bølgenes periode (der finnes forøvrig andre periodemål, med andre navn, som ikke er relatert til null-nivået). *Signifikant bølgehøyde*, H_s , er en lignende parameter for beskrivelse av bølgehøyde. Den har en litt vanskeligere definisjon, se nedenfor.

5.3 SIGNIFIKANT BØLGEHØYDE

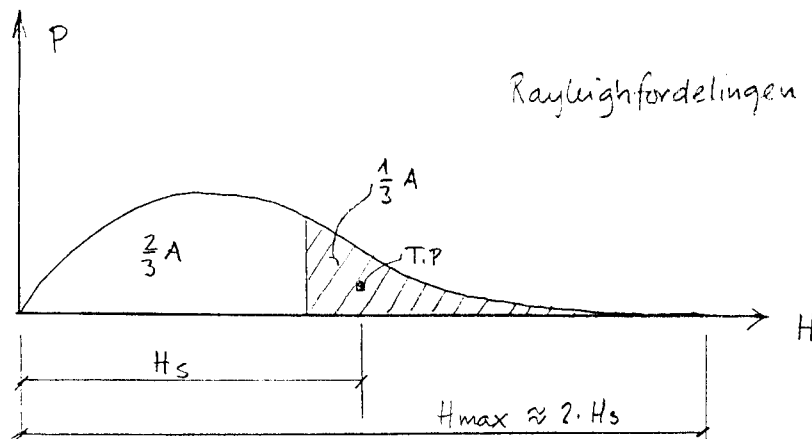
I en korttids sjøtilstand viser det seg at bølgehøydene er tilnærmet Rayleighfordelte.

$$P(H = h) = \frac{4}{m_0} e^{-\frac{h^2}{8m_0}}$$

- hvor: m_0 er bølgespekterets areal¹⁾. Når signifikant bølgehøyde H_s er kjent, kan dette

$$\text{normalt beregnes som: } m_0 = \frac{H_s^2}{16}$$

¹⁾ Dette kan vi desverre ikke komme nærmere inn på her.



Signifikant bølgehøyde, H_s , er definert som *gjennomsnittshøyden til den tredjedelen av bølgene som er høyest*. I Rayleighfordelingen over, tilsvarer dette avstanden ut til tyngdepunktet av den skraverte delen av fordelingen, som er tredjedelen av totalarealet.

Hvor høye bølgene kan bli i en sjøtilstand, vil avhenge av hvor lenge sjøtilstanden varer (dette er noenlunde analogt med at været en eller annen gang blir værre enn det noen gang har vært; en terning med 6 sider må gjennomsnittlig kastes 6 ganger for å få 6, en terning med 10 sider 10 ganger etc.). Den bølgen som etter sannsynlighetsregning («i gjennomsnitt») overskrides kun en gang i løpet av N bølger, kalles H_{max} , og kan utledes som:

$$H_{max} = H_s \sqrt{0.5 \cdot \ln(N)}$$

Dette representerer den mest sannsynlige høyden til maksbølgen (maksbølgen kan bli høyere, og lavere, men dette er den mest sannsynlige høyden).

I en sjøtilstand hvor $T_z = 8 \text{ sek}$, vil vi i løpet av 3 timer ha:

$$N = \frac{3t \cdot 3600 \frac{\text{sek}}{t}}{8 \frac{\text{sek}}{\text{bølge}}} = 1350 \text{ bølger}$$

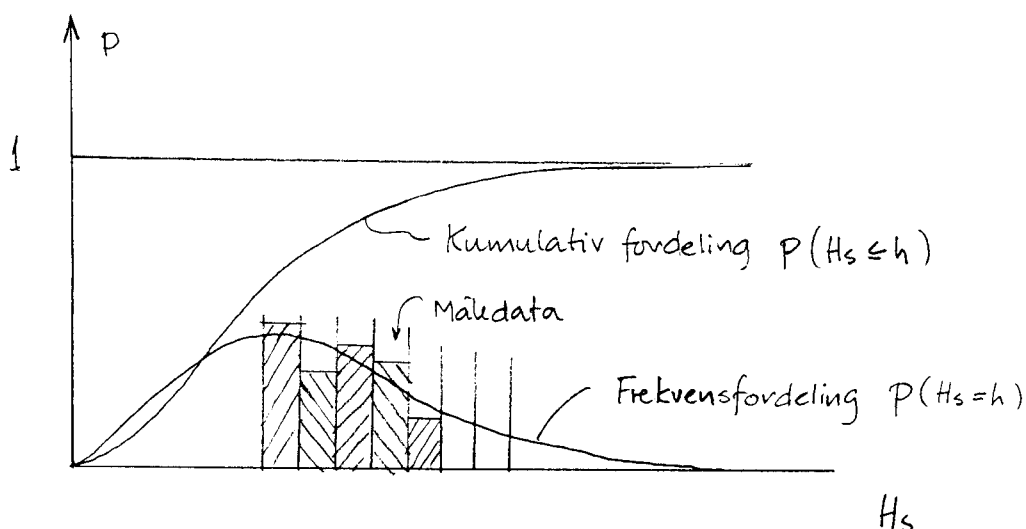
Dersom $H_s = 6 \text{ m}$, vil maksbølgen tilnærmet bli:

$$H_{max} = H_s \sqrt{0.5 \ln N} = 6 \sqrt{0.5 \ln 1350} = 6 \cdot 1.89 = \underline{\underline{11.4 \text{ m}}}$$

Tilnærmet regnes $H_{max} \approx 2 \cdot H_s$

5.4 LANGTIDSSTATISTIKK

Denne type statistikk tilsvarende den statistikken vi snakket om ifm. vind. Den beskriver hvorledes H_s fordeler seg statistisk over lang tid. Husk at H_s er en størrelse som uttrykker en slags gjennomsnittsverdi (gj.sn. av 1/3 av de høyeste bølgene) for bølgehøydene i en kortidstilstand. Så, langtidsstatistikken viser på en måte hvorledes kortidstilstanden varierer over tid, - flere år.



Som for vind tilpasses måldata statistiske fordelingsfunksjoner. Weibullfordelingen brukes også ifm. bølger. Den enkleste formen er den to-parametriske, som vi brukte for vind. Denne gir en rett linje på Weibullpapiret. Det finnes også en mer «komplisert» treparametrisk Weibullfordeling, som normalt gir ennå bedre tilpassning til måldata. Og der finner andre fordelinger.

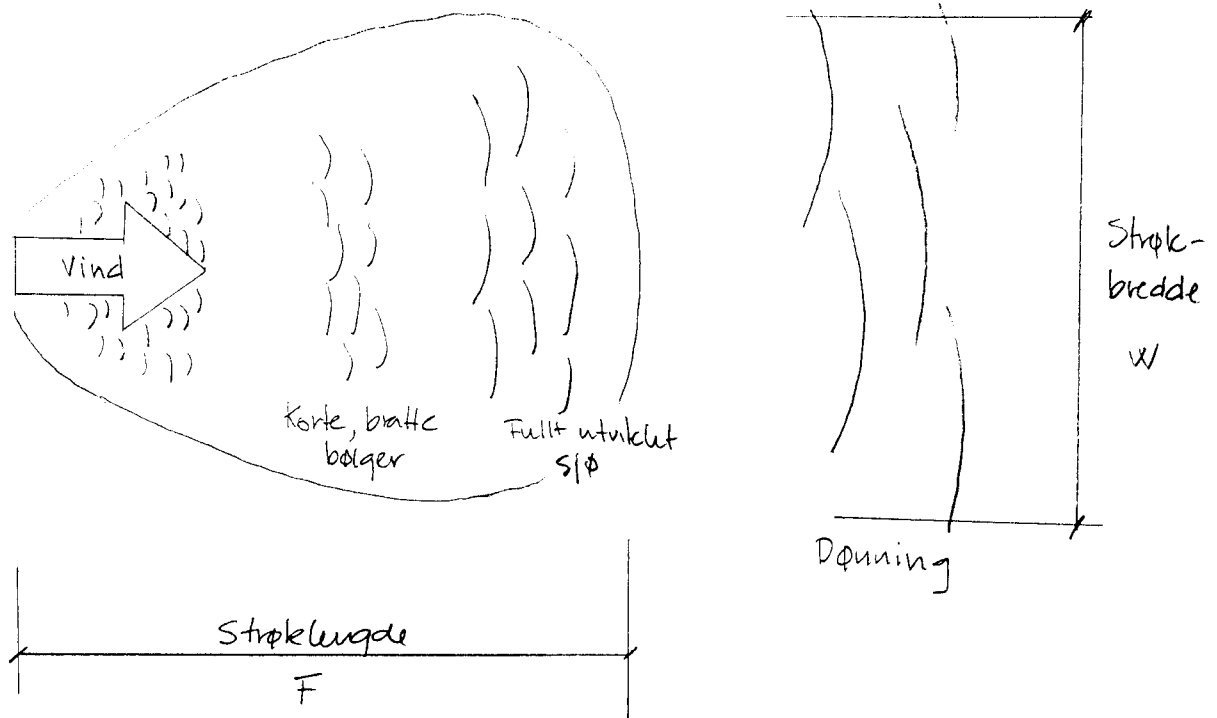
Ofte framstilles H_s sammen med T_z i tabeller (fra måldata). Dette er en todimensjonal fordeling, en simultanfordeling (simultan -samtidig). Vedlagte tabell (neste side) er basert på måldata fra Statfjordfeltet i løpet av årene 1980 - 1989. Tabellen viser at ved en gitt H_s kan vi ha svært forskjellig midlere nulloppekryssingsperiode T_z . Trenden er likevel at jo høyere H_s , jo høyere T_z . Det norske Veritas angir følgende empiriske sammenheng («erfaringsverdi») mellom H_s og den tilnærmet mest sannsynlige T_z som $T_z = 6H_s^{0.3}$.

STATION: STATFJORD
MEASURING PERIOD: 1/ 1 1980 UNTIL 31/ 7 1989
CONTINGENCY TABLE

WAVE PERIOD		WAVE HEIGHT																
SEC		M																
		<=	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	>=	I	I PER	I	
INTERVAL	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	SUM	I	
	I	.9	1.9	2.9	3.9	4.9	5.9	6.9	7.9	8.9	9.9	10.9	11.9	12.0	I	I	CENT	
<=	I														I	I	I	
1.9	I		1												I	1	.0	
2.0	I														I	I	I	
2.9	I	1	3	1											I	5	.0	
3.0	I														I	I	I	
3.9	I		15	1	1										I	17	.1	
4.0	I														I	I	I	
4.9	I	9	216	5	6										I	236	.9	
5.0	I														I	I	I	
5.9	I	36	1390	478	7	2									I	1913	7.1	
6.0	I														I	I	I	
6.9	I	41	2342	3121	618	16	1		1						I	6140	22.8	
7.0	I														I	I	I	
7.9	I	29	1708	2627	2540	833	40	1	2						I	7780	28.9	
8.0	I														I	I	I	
8.9	I	31	936	1307	1594	1658	764	129	4	1					I	6424	23.8	
9.0	I														I	I	I	
9.9	I	3	356	432	564	525	526	445	122	17					I	2990	11.1	
10.0	I														I	I	I	
10.9	I	19	147	122	137	134	131	111	138	93	15	1			I	1048	3.9	
11.0	I														I	I	I	
11.9	I	7	60	25	15	29	33	21	21	30	31	8	1		I	281	1.0	
12.0	I														I	I	I	
12.9	I	7	13	5	4	1	7	10	3	10	5	6		2	I	73	.3	
13.0	I														I	I	I	
13.9	I	1	11		3	2	3	2	2	2	3				I	29	.1	
>=	I	7	10		2	1	4				2				I	I	I	
14.0	I														I	26	.1	
SUM	I	191	7208	8124	5491	3201	1509	719	293	153	56	15	1	2	I	26963	I	
PERCENT	I	.7	26.7	30.1	20.4	11.9	5.6	2.7	1.1	.6	.2	.1	.0	.0	I	I	I	
	I														I	I	I	

THE NORWEGIAN METEOROLOGICAL INSTITUTE,
THE ENVIRONMENTAL DATA CENTER, P.O. BOX 43 BLINDERN,
0313 OSLO 3, NORWAY.

5.5 H_s OG T_z ESTIMERT FRA VIND



Figuren over illustrerer hvorledes vind genereres. Det er observert at både lengden og bredden av området som vinden virker på har betydning for bølgehøyden som genereres. Så, *strøklengden* (F , eng. *fetch length*) og *strøkbredde* (W) må nødvendigvis inngå. Fullt utviklet sjø er den sjøtilstanden som «kommer ut» ved enden av strøklengden, etter at vinden har virket så lenge at bølgene ikke vokser mer.

Generelt er den genererte sjøtilstanden avhengig av flere faktorer:

- vindhastighet, vindhastighetsvariasjoner
- bølgefriksjon mot land
- vindvarighet
- strøklengde, strøkbredde
- vanndyp
- strøm

Der finnes ulike metoder til å estimere vindgenererte sjøtilstander, som i ulik grad tar hensyn til disse faktorene. Vi skal se på en enkel metode som gjelder for begrensede farvann, og som kun tar hensyn til strøklengde og strøkbredde. Vindhastigheten forutsettes konstant, og med varighet som gir fullt utviklet sjø. De bratteste bølgene vil da være på grensen til bryting.

Følgende formlene er hentet fra «Håndbok for design og dokumentasjon av åpne merdanlegg» (Marintek 1994), og er sannsynligvis empiriske:

- Justert vindhastighet:

$$U_A = 0.71 \cdot U_{ref}^{1.23} \quad [\text{m/s}]$$

Her justeres referanseshastigheten U_{ref} (10 m.o.h, 10 min. middeld) til et nivå og midlingstid som formlene under er basert på.

- Signifikant bølgehøyde:

$$H_s = 5.112 \cdot 10^{-4} \cdot U_A \cdot F_e^{1/2} \quad [\text{m}]$$

Effektiv strøklengde F_e finnes fra figuren under, utfra W/F forholdet

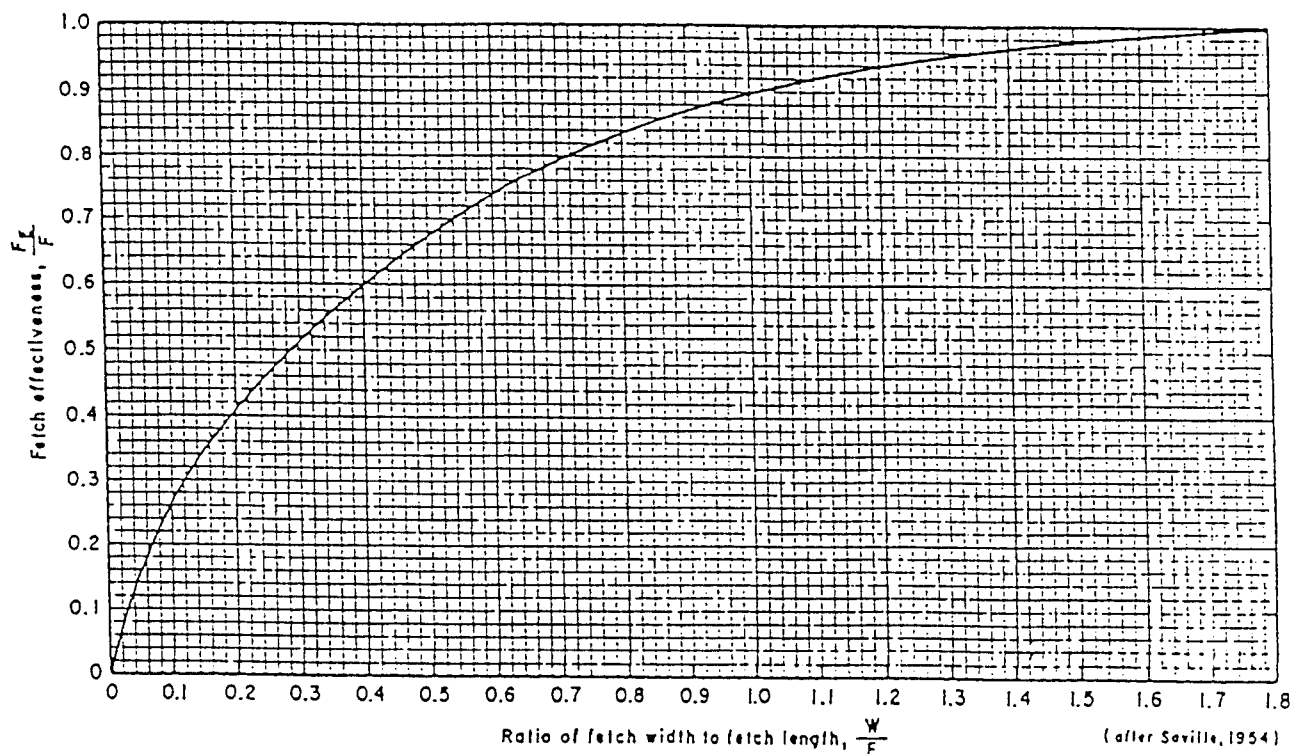
- Bølgespekterets topp-periode:

$$T_p = 0.06238 (U_A \cdot F_e)^{1/3} \quad [\text{sek}]$$

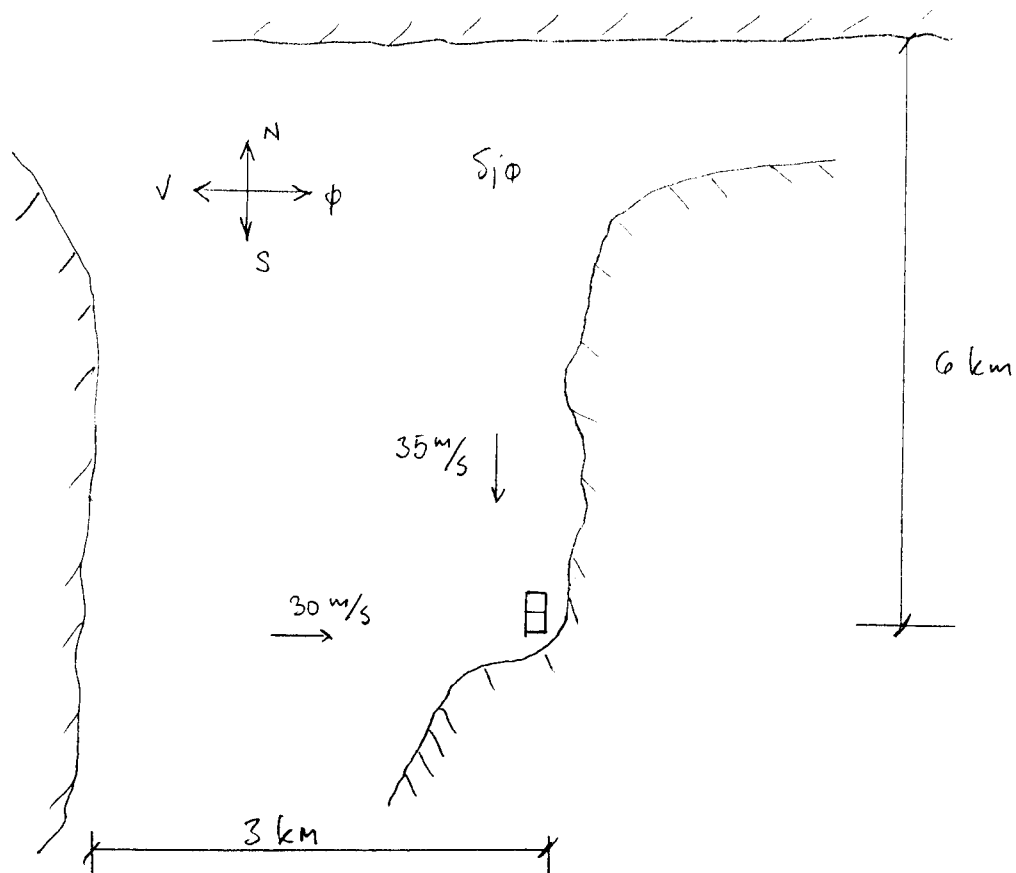
Dette ligger nær perioden til de høyeste bølgene.

- Midlere nulloppekryssingsperiode:

$$T_z = 0.71 \cdot T_p$$



5.5.1 Eksempel



Gitt 100 års ref. vindhastighet:

- fra Nord: 35 m/s
- fra Sør : 30 m/s

Finn H_s og T_z ved anlegget ved fullt utviklet sjø. Finn også mest sannsynlig høyeste bølge.

Vind fra Nord:

$$U_A = 0.71 \cdot 35^{1.23} = 56.29 \text{ m/s}$$

$$\frac{W}{F} = 0.5$$

$$\text{Fra figur: } \frac{F_e}{F} = 0.68 \Rightarrow F_e = 0.68 \cdot F = 0.68 \cdot 6000 \text{ m} = 4080 \text{ m}$$

$$H_s = 5.112 \cdot 10^{-4} \cdot 56.29 \cdot 4080^{1/2} = \underline{\underline{1.8 \text{ m}}} \Rightarrow H_{\max} \approx \underline{\underline{3.6 \text{ m}}}$$

$$T_z = 0.71 \cdot (0.06238 \cdot (56.29 \cdot 4080)^{1/3}) = \underline{\underline{2.7 \text{ s}}}$$

Vind fra Vest:

$$U_A = 0.71 \cdot 30^{1.23} = 46.6 \text{ m / s}$$

$$\frac{W}{F} > \frac{6}{3} = 2 > 1.8$$

$$\text{Fra figur: } \frac{F_e}{F} = 1 \Rightarrow F_e = F = 3000 \text{ m}$$

$$H_s = 5.112 \cdot 10^{-4} \cdot 46.6 \cdot 3000^{1/2} = \underline{\underline{1.3 \text{ m}}} \quad \Rightarrow \quad H_{\max} \approx \underline{\underline{2.6 \text{ m}}}$$

$$T_z = 0.71 \cdot (0.06238 \cdot (46.6 \cdot 3000)^{1/3}) = \underline{\underline{2.3 \text{ s}}}$$

Dette må ikke oppfattes som eksakt «riktig». Men, skal man utplassere er anlegg her, er dette det man omtrent må regne med av maksimale bølger. Det er 100-års vindverdier som ligger til grunn, så normalt vil bølgene være vesentlig lavere.

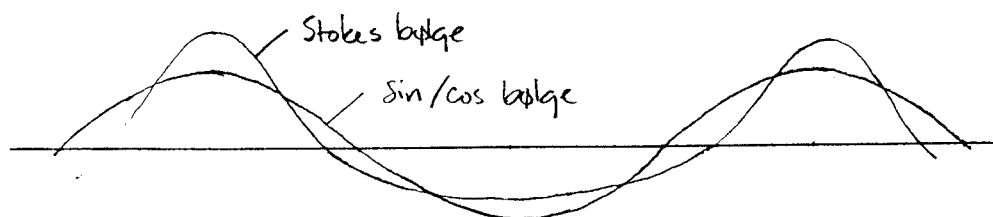
5.6 LINEÆR BØLGETEORI

Det finnes flere bølgeteorier. De gir noe ulik beskrivelse av egenskaper ved bølger, som bølgeprofil, væskepartikkelbevegelser, dynamisk trykk, m.m. Hva som er «best» eller hva som er akseptabelt å bruke, kommer litt an på hva som skal beregnes.

Når det gjelder å beregne krefter på legemer *i bølger*, er lineær bølgeteori anvendt i stor grad, gitt at vanddypet ikke er for lite, dvs. ikke er mindre enn 0.3 ganger bølgelengden. Denne teorien gir ikke alltid nøyaktig nok beskrivelse av forholdene *ved overflaten*. Spesielle effekter som f.eks. bølgeslag (slamming), sjokktrykk fra brytende bølger, høyde på bølgetoppene, må tas særskilt hensyn til, og andre teorier må kanskje brukes.

Lineær bølgeteori er basert på en rekke forenklinger (lineær vil si: alle størrelser er proporsjonale (lineære) med bølgehøyden). Hovedforutsetningene er at væsken er *friksjonsfri*, og at bølgene *er lave i forhold til lengden* (kalles derfor lav-amplitude bølgeteori). Tendensen er at teorien «tøyes». Den kan likevel gi akseptable resultater.

Ikkelineær bølgebeskrivelser (Stokes bølger) gir bølger som har høye topper men lave daler. Dette svarer mer til den bølgeprofilen man observerer, mens lineær bølgebeskrivelse (Airy bølger) gir sinusformede bølger.



I tillegg til at lineær bølgeteori i mange sammenhenger gir akseptable resultater, er hovedfordelen med teorien at den er relativt enkel å bruke. Ikkelineære teorier er vesentlig mer kompliserte, og egner seg f.eks. ikke til håndregning.

Alle egenskaper ved lineære bølger kan utledes av en potensialfunksjon, som kalles *hastighetspotensialet*. På generell form, ser dette slik ut:

$$\phi = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - kx)$$

Her er:

a - bølgeamplitude [m] (halve bølgehøyden, $H/2$)

g - tyngdens akselerasjon [m/s^2]

h - vanddypet [m]

t - tidsvariabel [sek]

z - vertikal stedsvariabel (+ oppover, origo er ved stille vannsnivå)

x - horisontal stedsvariabel

$$k = \frac{2\pi}{L} \text{ - bølgetallet [rad/m] ; } L \text{ er bølgelengden [m]}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ - sirkelfrekvensen [rad/s] ; } T \text{ er bølgeperioden [s]}$$

Dersom vanddyptet er større enn halve bølgelengden, blir hastighetspotensialet uavhengig av vanddypt (h faller ut). Da forenkles hastighetspotensialet til:

$$\boxed{\phi = \frac{ag}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx)} \quad \left(\text{dypt vann, } h > \frac{L}{2} \right)$$

Hastighetspotensialet er utledet bl.a. under forutsetning om hvirvlingsfri væske, dvs. friksjonsfri væske. Dette viser seg å medføre følgende krav til partikkelhastighetene (u - horisontalkomponent; w - vertikalkomponenten):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

Den funksjonen, ϕ , som kan oppfylle denne likheten må være slik at:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \text{ og } \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

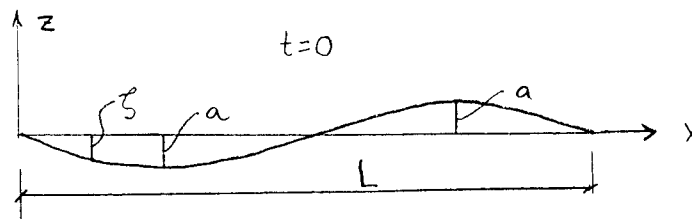
Ved innsetting vil vi se at venstre side blir lik høyre side. I kombinasjon med væskens kontinuitetsligning gir dette Laplace's ligning. Teori som baserer seg på slike sammenhenger kalles potensialteori, og strømming basert på dette kalles potensialstrømming. Lineær bølgeteori beskriver potensialstrømming.

5.6.1 Bølgeprofilen

Dette avledes fra hastighetspotensialet via sammenhengen $\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0}$. Enten vi deriverer det generelle hastighetspotensialet, eller dypt vann potensialet, får vi:

$$\zeta = a \sin(\omega t - kx)$$

ζ («zet a») er overflatehevningsen ved en gitt x -posisjon, ved et gitt tidspunkt t .



Sammenhengen mellom sirkelfrekvensen ω og bølgetallet k , er gitt ved den såkalte frekvensrelasjonen (eller dispersjonsrelasjonen):

$$\omega^2 = gk \tanh kh$$

På dypt vann forenkles denne til:

$$\omega^2 = gk$$

Innsetter vi $k = \frac{2\pi}{L}$ og $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ser vi at der er en entydig sammenheng mellom en bølges lengde og periode:

$$L = \frac{g}{2\pi} T^2 \quad (\text{dypt vann})$$

Er bølgens periode gitt, er lengden det også, eller omvendt.

Der er ingen tilsvarende relasjon for bølgehøyden. I en sjøtilstand kan bølger med samme lengde ha ulik høyde. Bølgebrattheten S (eng. *steepness*) kan ikke bli større en ca:

$$S_{\max} = \frac{1}{7}$$

som svarer til begynnende brytning.

5.6.1.1 Eksempel

En bølge har amplitude $a = 1 \text{ m}$, og periode $T = 3 \text{ s}$, på dypt vann.

- Finn bølgetallet og bølgelengden
- Finn bølgehøyden ved bryting (maks høyde)
- Tegn opp hvorledes bølgen står ved tidspunktene $t = 0, t = T/4, t = T/2$

Bølgetallet og bølgelengden:

$$T = 3 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6.28}{3 \text{ s}} = 2.09 \text{ [1/s]} \quad (\text{eg. [rad/s]})$$

$$k = \frac{\omega^2}{g} = \frac{2.09^2}{9.81} = \underline{\underline{0.447 \text{ [1/m]} \text{ [1/m]}}} \quad (\text{eg. [rad/m]})$$

$$L = \frac{2\pi}{k} = \frac{g}{2\pi} T^2 = \frac{9.81}{2\pi} \cdot 3^2 = \underline{\underline{14 \text{ m}}}$$

Bølgehøyde ved bryting:

$$S_{\max} = \frac{H}{L} = \frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{7} L = \frac{1}{7} 14 \text{ m} = \underline{\underline{2 \text{ m}}}$$

Den bølgen vi har er altså på grensen til bryting, og kan ikke bli høyere.

Bølgeprofil ved $t = 0$:

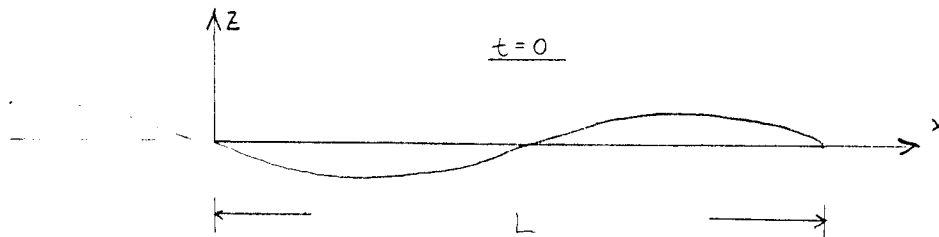
Vi bruker formelen for bølgeprofilen, som for $t = 0$ blir:

$$\zeta = a \sin(\omega t - kx) = 1 \cdot \sin(0 - kx) = \sin\left(-\frac{2\pi}{L} x\right)$$

Vi setter inn ulike verdier for x :

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \zeta &= \sin(-0) = 0 & (\text{grader} = \frac{360}{2\pi} \cdot \text{rad}) \\ x = \frac{L}{4}: \quad \zeta &= \sin\left(-\frac{2\pi}{L} \frac{L}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-90^\circ) = -1 \text{ m} \\ x = \frac{L}{2}: \quad \zeta &= \sin\left(-\frac{2\pi}{L} \frac{L}{2}\right) = \sin(-\pi) = \sin(-180^\circ) = 0 \\ x = \frac{3L}{4}: \quad \zeta &= \sin\left(-\frac{2\pi}{L} \frac{3L}{4}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \sin(-270^\circ) = 1 \text{ m} \\ x = L: \quad \zeta &= \sin\left(-\frac{2\pi}{L} L\right) = \sin(-2\pi) = \sin(-360^\circ) = 0 \end{aligned}$$

Altså må bølgen da stå slik:



Bølgeprofil ved $t = T/4$:

$$\zeta = a \sin(\omega t - kx) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} - \frac{2\pi}{L} x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{L} x\right)$$

$$x = 0: \quad \zeta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \sin(90^\circ) = 1 \text{ m}$$

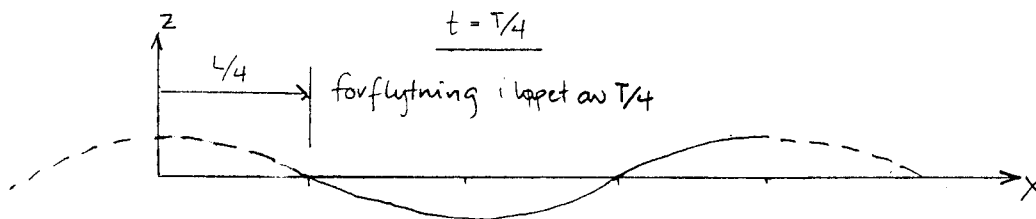
$$x = \frac{L}{4}: \quad \zeta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{L} \frac{L}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(0) = 0$$

$$x = \frac{L}{2}: \quad \zeta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{L} \frac{L}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = \sin(-90^\circ) = -1 \text{ m}$$

$$x = \frac{3L}{4}: \quad \zeta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{L} \frac{3L}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin(-180^\circ) = 0 \text{ m}$$

$$x = L: \quad \zeta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{L} L\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \sin(-270^\circ) = 1 \text{ m}$$

Altså:



Bølgeprofil ved $t = T/2$:

$$\zeta = a \sin(\omega t - kx) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} - \frac{2\pi}{L} x\right) = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{L} x\right)$$

$$x = 0: \quad \zeta = \sin(\pi - 0) = \sin(180^\circ) = 0$$

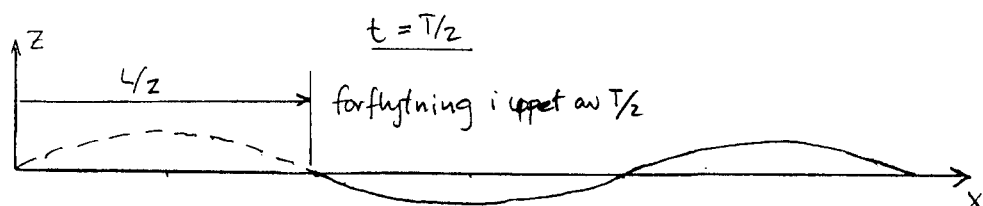
$$x = \frac{L}{4}: \quad \zeta = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{L} \frac{L}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(90^\circ) = 1$$

$$x = \frac{L}{2}: \quad \zeta = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{L} \frac{L}{2}\right) = \sin(\pi - \pi) = \sin(0) = 0$$

$$x = \frac{3L}{4}: \quad \zeta = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{L} \frac{3L}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin(-90^\circ) = -1 \text{ m}$$

$$x = L: \quad \zeta = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{L} L\right) = \sin(\pi - 2\pi) = \sin(-180^\circ) = 0$$

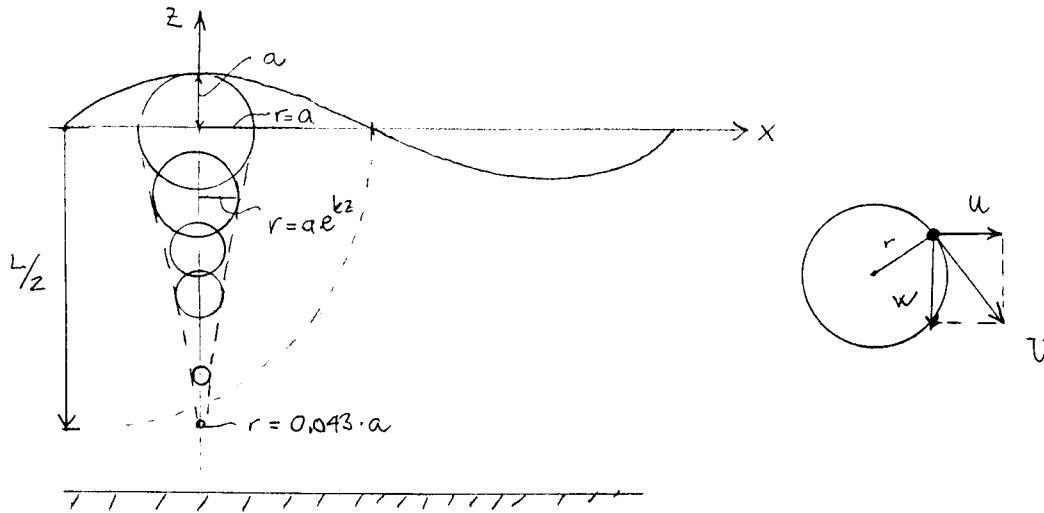
Altså:



5.6.2 Partikkelbevegelser

5.6.2.1 Dypt vann ($h > L/2$)

Ifølge lineær bølgeteori beveger partiklene seg i lukkede sirkler (dypt vann). I virkeligheten beveger partiklene seg med en liten netto forflytning, pr. «runde».



Hastighetskomponentene utledes fra hastighetspotensialet for dypt vann:

- horisontal hastighet: $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \omega a e^{kz} \sin(\omega t - kx)$

- vertikal hastighet: $w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \omega a e^{kz} \cos(\omega t - kx)$

Total hastighet er $U = \sqrt{u^2 + w^2}$.

De tilsvarende akselerasjonskomponenter er:

- horisontal akselerasjon: $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = \omega^2 a e^{kz} \cos(\omega t - kx)$

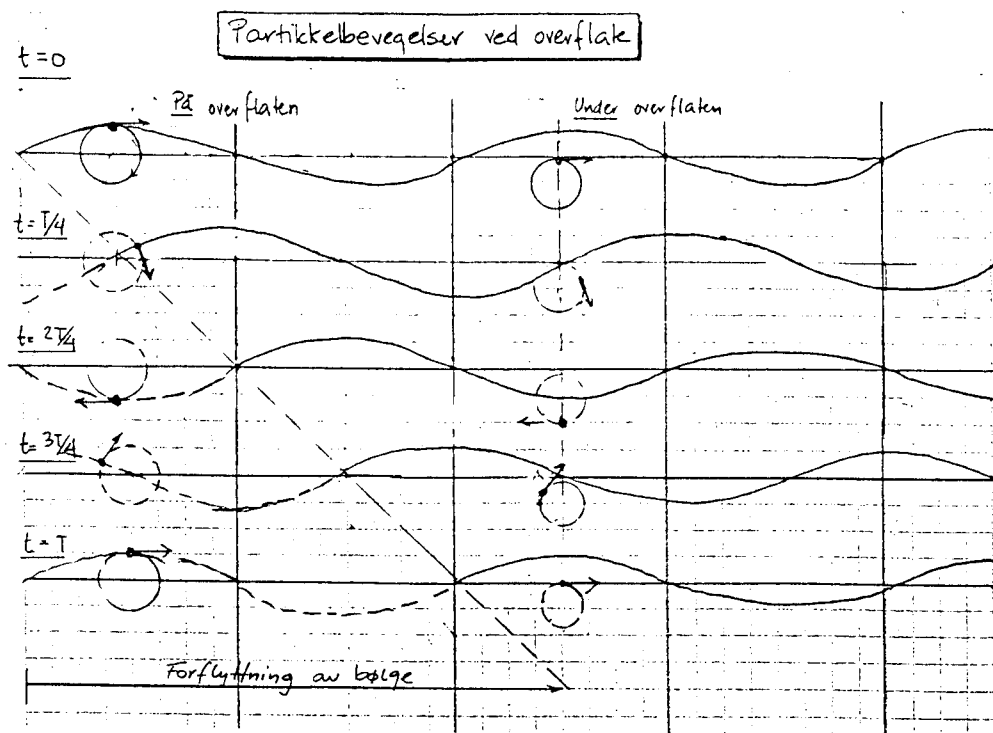
- vertikal akselerasjon: $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} = -\omega^2 a e^{kz} \sin(\omega t - kx)$

Ved et dyp som er lik halve bølgelengden, er partikkelbevegelsene så små at de normalt neglisjeres. Dette kan vi se utfra faktoren e^{kz} :

- ved overflaten, $z = 0$: $e^{kz} = e^0 = 1$

- ved $z = -L/2$: $e^{\frac{2\pi}{L}(-\frac{L}{2})} = e^{-\pi} = 0.043$

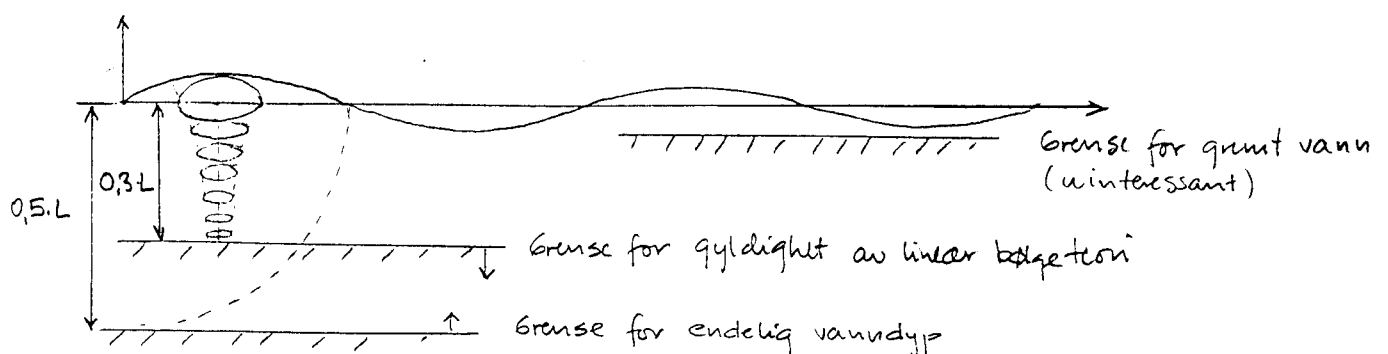
Altså, bevegelsene ved $z = -L/2$ er bare 4.3 % av de vi har ved overflaten.



5.6.2.2 Endelig vanndyp ($L/20 < h < L/2$)

Partiklene beveger seg i elliptiske baner. Bevegelsene er til stede helt ned til bunnen, men reduseres. Bevegelsen kan utledes som over, men ved derivasjon av det *generelle* hastighetspotensialet (NB: det generelle hastighetspotensialet gjelder uansett dyp, men kan altså forenkles for dypt vann).

Vi er primært interessert i bølger på dypt vann, og henviser derfor bare til formelark på neste side, for endelig vanndyp (NB: Husk at symbol for dybde her er d og ikke h).



5.6.2.3 Grunt vann ($h < L/20$)

Dette er så grunt, at det normalt er uinteressant. Her er virkningen av bunnfriksjonen så stor at lineær bølgeteori (som neglisjerer friksjon) blir svært unøyaktig. Alternative teorier bør vurderes.

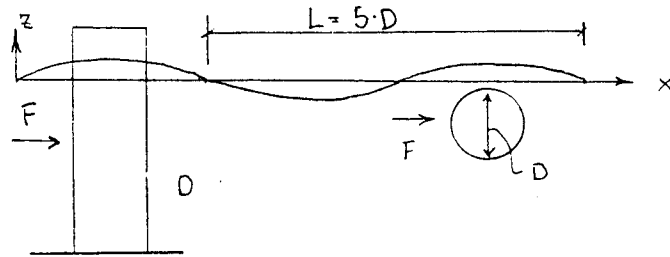
	Grundt vann ($d/L < \frac{1}{20}$)	Endelig vanddyb ($\frac{1}{20} < \frac{d}{L} < \frac{1}{2}$)	Dypt vann ($\frac{d}{L} > \frac{1}{2}$)
Hastighetspotensial	$\phi = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos(\omega t - kx)$	$\phi = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos(\omega t - kx)$	$\phi = \frac{ag}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx)$
Sammenheng mellom bølgetall og sirkelfrekvens	$\frac{\omega^2}{g} = k^2 d$	$\frac{\omega^2}{g} = k \tanh kd$	$\frac{\omega^2}{g} = k$
Sammenheng mellom bølgelengde og bølgeperiode	$L = T \sqrt{gd}$	$L = \frac{g}{2\pi} T^2 \tanh \frac{2\pi d}{L}$	$L = \frac{g}{2\pi} T^2$
Bølgeprofil	$\eta = a \sin(\omega t - kx)$	$\eta = a \sin(\omega t - kx)$	$\eta = a \sin(\omega t - kx)$
Dynamisk trykk	$p_d = \rho g a \sin(\omega t - kx)$	$p_d = \rho g a \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \sin(\omega t - kx)$	$p_d = \rho g a e^{kz} \sin(\omega t - kx)$
Horisontal partikkelhastighet	$u = \frac{\omega a}{kd} \sin(\omega t - kx)$	$u = \omega a \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \sin(\omega t - kx)$	$u = \omega a e^{kz} \sin(\omega t - kx)$
Vertikal partikkelhastighet	$w = \omega a \frac{z+d}{d} \cos(\omega t - kx)$	$w = \omega a \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd} \cos(\omega t - kx)$	$w = \omega a e^{kz} \cos(\omega t - kx)$
Horisontal partikkelakselerasjon	$\dot{u} = \frac{\omega^2 a}{kd} \cos(\omega t - kx)$	$\dot{u} = \omega^2 a \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \cos(\omega t - kx)$	$\dot{u} = \omega^2 a e^{kz} \cos(\omega t - kx)$
Vertikal partikkelakselerasjon	$\dot{w} = \omega^2 a \frac{z+d}{d} \sin(\omega t - kx)$	$\dot{w} = \omega^2 a \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd} \sin(\omega t - kx)$	$\dot{w} = \omega^2 a e^{kz} \sin(\omega t - kx)$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$, $k = \frac{2\pi}{L}$
 T = bølgeperiode
 L = bølgelengde
 a = bølgeamplitude
 g = tyngdens akselerasjon
 t = tidsvariabel
 x = forplantningsregning
 z = vertikal koordinat
 z : positiv oppover
 $z=0$: midlere vann-nivå
 d = midlere vanddybde
 Totalt trykk i væsken:
 $p_d = \rho g z + p_0$
 $(p_0 = \text{atmosfæretrykket})$

5.7 BØLGEKREFTER PÅ SMÅVOLUMER

Småvolumer er konstruksjoner eller konstruksjonselementer som er så slanke at de gir uvesentlig forstyrrelse av den innkommende bølgen i form av refleksjon og diffraksjon (avbøyning). Selv om ikke bølgen forstyrres på denne måten, vil likevel trykket omkring konstruksjonen endres. En sirkulær sylinder klassifiseres som småvolum når bølgelengden er 5 ganger større enn sylinderdiameter:

$$\frac{L}{D} > 5$$



Krefter på småvolumer beregnes vha. Morisons ligning. Av samme årsak som vi får (tilnærmet) konstant drag-kraft i konstant strøm:

$$F_s = C_d \frac{1}{2} \rho v_s^2 A$$

- får vi varierende dragkrefter i varierende strøm, gitt ved drag-leddet i Morisons ligning:

$$F_{b,d} = C_d \frac{1}{2} \rho u |u| A$$

Her er u horisontalhastigheten til bølgepartiklene. u^2 er byttet ut med $u|u|$, for å få riktig fortegn på kraften. Når hastigheten virker i positiv x-retning, blir kraften positiv (rettet langs positiv x-akse), men når hastigheten virker i negativ x-retning, blir kraften negativ. Absoluttverdien av kraften blir den samme om det benyttes u^2 eller $u|u|$.

Dersom vi har strøm i tillegg til bølge, anbefales det å beregne horisontal dragkraft slik:

$$F_{b+s,d} = C_d \frac{1}{2} \rho (u + v_s) |u + v_s| A$$

I bølger har partiklene også akselerasjon. Dette gir også en kraft. Den er gitt ved masse-leddet i Morisons ligning (her for horisontal-kraft):

$$F_{b,m} = \underbrace{\rho \dot{u} V}_{F_{FK}} + \underbrace{C_a \rho \dot{u} V}_{F_A} = (1 + C_a) \rho \dot{u} V = C_m \rho \dot{u} V$$

Her er V volumet av legemet, $\dot{u}$ er partikkelakselerasjon (her horisontalt). Første leddet i ligningen kalles Froude-Kryloff kraften (F_{FK}). Den kommer fram ved å integrere bølgens *uforstyrrede trykk* over konstruksjonens overflate (man integrerer trykket fra bølgen uten å ta

hensyn til at konstruksjonens nærvær endrer trykket). Det andre leddet tar hensyn til kraften fra denne trykkendringen (F_A). Det uttrykkes som en faktor, C_a , ganger Froude-Kryloff kraften. C_a kalles (hydrodynamisk) tilleggsmasse-koeffisient (eng: *added mass*) og kan fastlegges både teoretisk og eksperimentelt. Det som kalles masse-koeffisienten er alltid $C_m = 1 + C_a$.

Ordet *tilleggsmasse* kan virke litt forvirrende. Dette skriver seg fra en analogi. Istedetfor at legemet står i ro, og partiklene aksellereres, aksellereres legemet i stille vann. Dersom legemet tenkes vektløst, vil vi ikke måtte bruke krefter på å aksellerere selve legemet. Likevel må vi bruke en kraft til å akselerere legemet, som ifølge Morisons ligning tilsvarer den kraften som skal til for å aksellerere massen av fortrengt væskemengde, pluss tilleggsmassen.

Om vi hadde tatt fortrengt masse sammen med tilleggsmassen og aksellerert den *i luft*, ville vi i prinsippet få samme kraft som om legemet stod *fast* i aksellerert strøm. I denne analogien er tilleggsmasse et forståelig uttrykk, men det kan virke litt rart ifm. et stillestående legeme.

Vanlige hydrodynamiske koeffisienter for beregning av krefter på rør er:

$$\begin{aligned} C_d &= 1.0 \\ C_a &= 1.0 \Rightarrow C_m = 2.0 \end{aligned}$$

Dette forutsetter at rørene er helt neddykket, og ikke «unormalt» begrodd.

Dragkoeffisienter er i utgangspunktet avhengig av strømningshastigheten, eller mer presis Reynolds tall:

$$R_n = \frac{vD}{\nu}$$

- hvor:

v er hastighet til innkommende strøm [m/s]

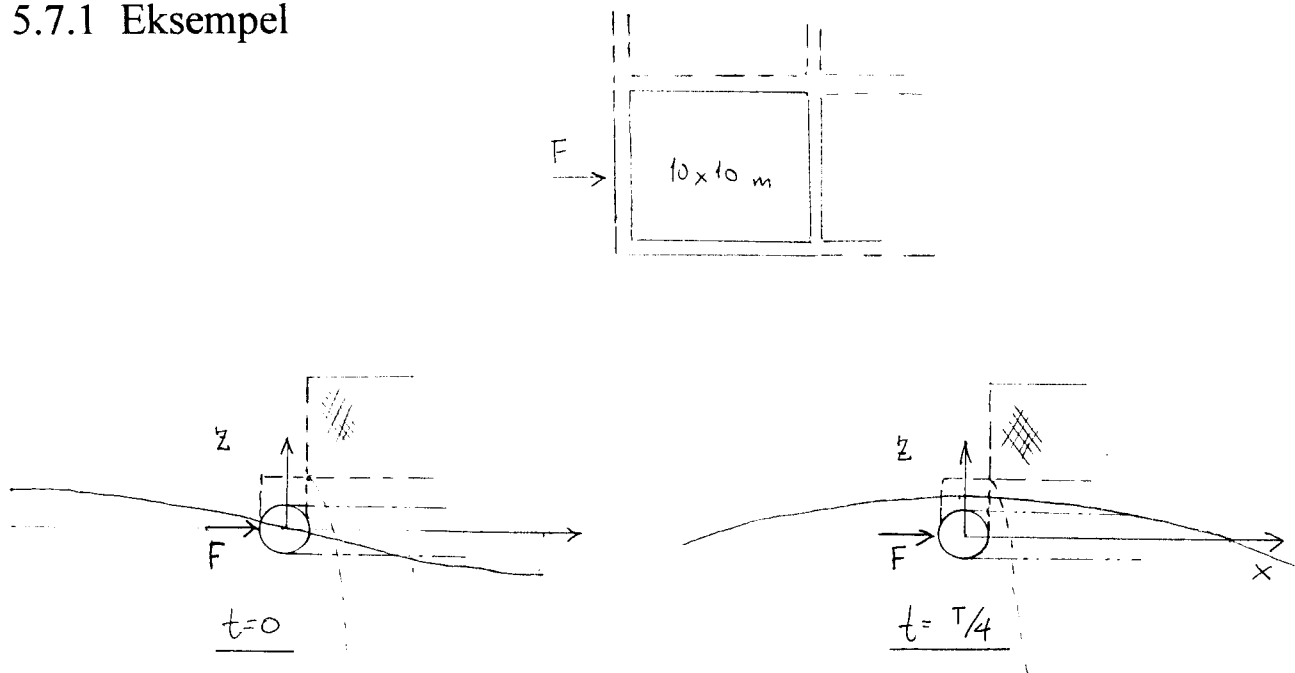
D er diameter til legemet normalt på strømmen

ν er kinematisk viskositet; for ferskvann og sjøvann kan brukes 10^{-6} [m²/s]

- litt avhengig av temperatur

Dette skyldes at hvirvelavløsningen på baksiden av legemet endrer seg med strømhastigheten. Legemer med skarpe hjørner har naturlige «spoilere», hvor hvirvlene avløses. Derfor er dragkoeffisienten til disse tilnærmet konstant uansett strømhastighet, se vedlegg. Dragkoeffisienten til kurvede former varierer med R_n , fordi punktet hvor hvirvlene avløses flytter seg lengre bak med økende hastighet.

5.7.1 Eksempel



Figuren viser et stivt anlegg, og hvorledes en bølgen fra forrige eksempel ($a = 1$ m, $T = 3$ s) antas å «stå» i forhold til fremre pontong, ved to tidspunkt, $t = 0$ og $t = T/4$. Anlegget er stort og antas å ligge praktisk talt i ro i bølgen. Pontongen har diameter 0.6 m, og har lengde 10 m.

Beregn horisontalkraften på pontongen for de to tidspunktene.

Tidspunkt $t = 0$:

Vi antar fullt neddykket pontong (de koeffisientene vi bruker forutsetter det; beregningen blir sannsynligvis konservativ).

- A og V :

$$A = D \cdot L = 0.6\text{ m} \cdot 10\text{ m} = \underline{6\text{ m}^2}$$

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L = \pi \frac{(0.6\text{ m})^2}{4} 10\text{ m} = \underline{2.83\text{ m}^3}$$

- Partikkelbevegelser:

$$x = 0; \quad z = 0; \quad t = 0:$$

$$u = \omega a e^{kz} \sin(\omega t - kx) = \omega 1 e^0 \sin(0) = 0$$

$$\dot{u} = \omega^2 a e^{kz} \cos(\omega t - kx)$$

$$= \left(\frac{2\pi}{3\text{ s}}\right)^2 \cdot 1\text{ m} \cdot e^0 \cdot \cos(0) = \underline{4.4\text{ m/s}^2}$$

- *Horisontal kraft på pontong:*

$$F_d = C_d \frac{1}{2} \rho u |u| A = 0$$

$$F_m = (1 + C_a) \rho \dot{u} V$$

$$= (1 + 1) \cdot 1025 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4.4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2.83 \text{m}^3 = \underline{25.5 \text{ kN}}$$

$$F = F_d + F_m = 0 + 25.5 = \underline{\underline{25.5 \text{ kN}}}$$

Tidspunkt $t = T/4$:

Vi antar fullt neddykket pontong (de koeffisientene vi bruker forutsetter det; beregningen blir sannsynligvis konservativ).

- *Partikkelbevegelser:*

$$x = 0; \quad z = 0; \quad t = T / 4 :$$

$$u = \omega a e^{kz} \sin(\omega t - kx)$$

$$= \frac{2\pi}{3s} \cdot 1\text{m} \cdot e^0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} - 0\right) = \frac{2\pi}{3s} \cdot 1\text{m} \cdot 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \text{rad}\right) = \frac{2\pi}{3s} \text{m} = \underline{2.1 \text{ m/s}}$$

$$\dot{u} = \omega^2 a e^{kz} \cos\left(\frac{\pi}{2} \text{rad}\right) = 0$$

- *Horisontal kraft på pontong:*

$$F_d = C_d \frac{1}{2} \rho u |u| A$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1025 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (2.1 \text{ m/s})^2 \cdot 6 \text{m}^2 = \underline{13.6 \text{ kN}}$$

$$F_m = (1 + C_a) \rho \dot{u} V = 0$$

$$F = F_d + F_m = 13.6 + 0 = \underline{\underline{13.6 \text{ kN}}}$$

Kommentar:

Vi har sett på to tidspunkt hvor enten masseleddet eller dragleddet er null. Imellom disse tidspunktene vil både masse- og dragledd være *ulik* null. En full analyse ville inkludere beregning for flere tidspunkt.

5.8 BØLGEKREFTER PÅ NØTER

Dette er generelt et vanskelig tema, som bare skal kommenteres kort, her. Både notens oppheng, og notens fleksibilitet, gjør at den må forskyves ganske mye før vi får vesentlig overføring av horisontalkraft til opphenget. Partikkelbevegelsen er først og fremst merkbar nær overflaten.

Det er primært dragkrefter som opptas av noten, og beregnes i prinsippet som for strøm:

$$F_{d,not} = C \frac{1}{2} \rho u |u| A \phi$$

Problemet er å finne den rette relativhastigheten mellom noten og vannet, siden noten ikke er stiv, og heller ikke følger bevegelsene til pontongsystemet. Forenklet kan noten antas stiv og i ro. Dette vil sannsynligvis gi en konservativ beregning.

Massekraften blir liten, og neglisjeres normalt. Dette blir slik, fordi tråddiameteren i noten er liten. For massekraften inngår diameteren i 2'dre potens, men i 1'ste potens for dragkraften. Kvadrerer vi en liten størrelse, får vi en mye mindre størrelse. Dermed blir massekraften normalt neglisjerbar.

5.9 DIMENSJONERENDE BØLGE

Vi skal her snakke om en måte å dimensjonere på som kalles *designbølge*-metoden. I en sjøtilstand vil bølgehøyder og perioder variere hele tiden. Det kan derfor være relevant å dimensjonere et anlegg for mange bølger (og flere bølgeposisjoner pr. bølge). Dette kan bli litt av en jobb. For å gjøre dette håndterlig forsøker man å sortere ut de bølgene som etter alt å dømme vil gi størst belastning. Dette er designbølgene, eller dimensjonerende bølger.

Det er ikke nødvendigvis slik at den største bølgen gir størst kraft. I hovedsak fastlegges designbølger utfra hva som gir høyest belastning

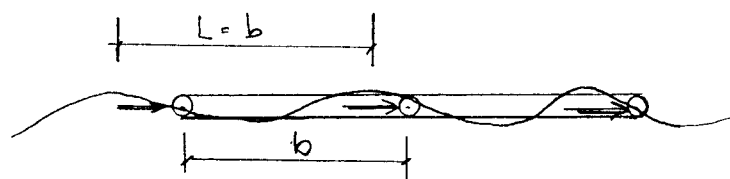
- internt i anlegget
- horisontalt
- vertikalt
- i fortøyingssystemet (eksternt)

Designbølger brukes til å dimensjonere mot en maksimalbelastning. Dette kalles en bruddgrenseanalyse. Det kontrolleres at anlegget ikke belastes til bruddgrensetilstanden, dvs. overskrider grensen for maksimalbelastning.

Men, det er ikke bare bruddgrensetilstanden som må unngås. Normalt kan også utmatting være et problem, spesielt i stive stålanlegg. Utmattingslevetiden er avhengig ikke bare designbølger, men av hele lasthistorien over lang sikt, fra både små og store bølger. Utmattingsanalyser krever en annen angrepsmåte, og vi skal ikke komme inn på dette her.

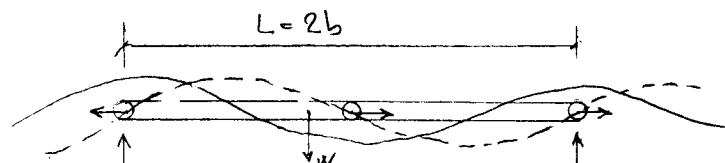
Her er et par eksempler på designbølger:

Designbølge 1 ($L = b$):



Bølgelengden er lik lengden mellom pontongene. Kraftene vil virke samme veien på hver pontong. Dette kan gi store krefter i forankringssystemet, dersom anlegget er stivt forankret. Bølgehøyden er bestemt av maks bølgebratthet ved bryting, $H_1 = b/7$.

Designbølge 2 ($L = 2b$):

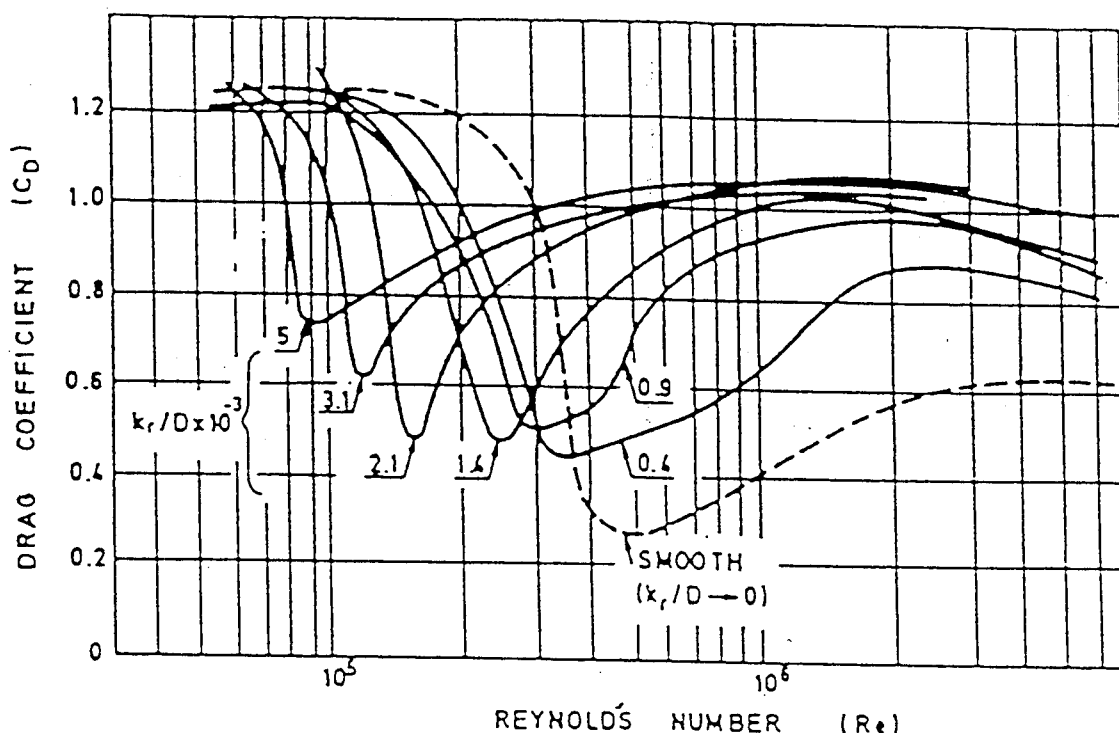


Her gir bølgene store interne krefter horisontalt, men små eksterne krefter. Denne bølgen kan bli dobbelt så høy som den forrige ($H_2 = 2b/7$), og kan også gi store vertikale belastninger.

5.10 VEDLEGG

Dragkoeffisienter er vedlagt ifm. Vindkrefter (kap. 3), og kan brukes både for luft og vann. Kantede former er tilnærmet R_n - uavhengige, det viser vedlagte figurer over ulike tverrsnitts R_n -avhengighet (fra «Håndbok for design og dokumentasjon av merdanlegg» Marintek '94). Nedenfor er C_d variasjonen for rør gitt (se også vedlegg til Vind-kapittelet), for forskjellige ruhetsgrader (ruhet: k_r er «høyden av ruhetene», fra overlatebunn til topp). Dette gjelder i konstant strøm. Når strømmingen oscillerer blir bildet et annet (R_n vil da variere hele tiden; et annet «tall» kommer inn i bildet, Keulegan-Carpenter-tallet (KC-tallet)). Det står likevel fast at $C_d = 1.0$ er vanlig brukt dimensjoneringsverdi.

Til slutt er det tatt med to tabeller over tilleggsmasse-koeffisienter for ulike geometrier (fra DnV Classification Note 30.5). NB: C_m er her ikke masse-koeffisienter.



Dragkraft-koeffisienter for sirkulær sylinder i konstant strøm.

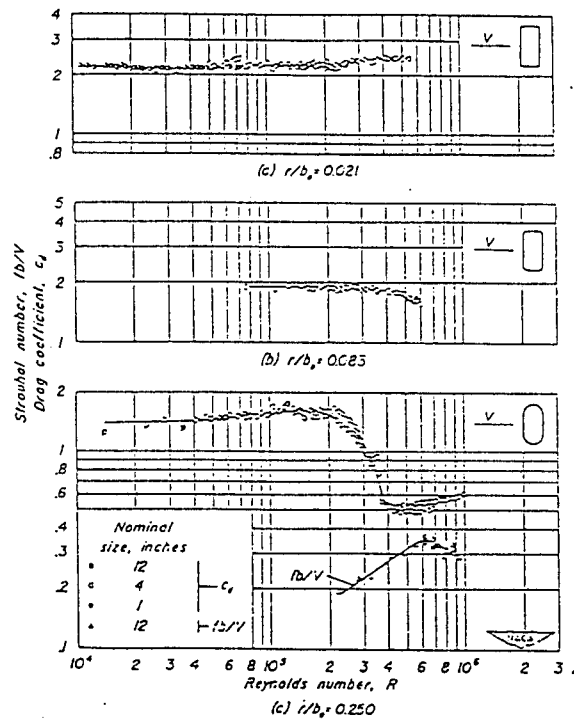


Figure 7.—Variation of drag coefficient and Strouhal number with Reynolds number for the 1:2 fineness ratio rectangular cylinders.

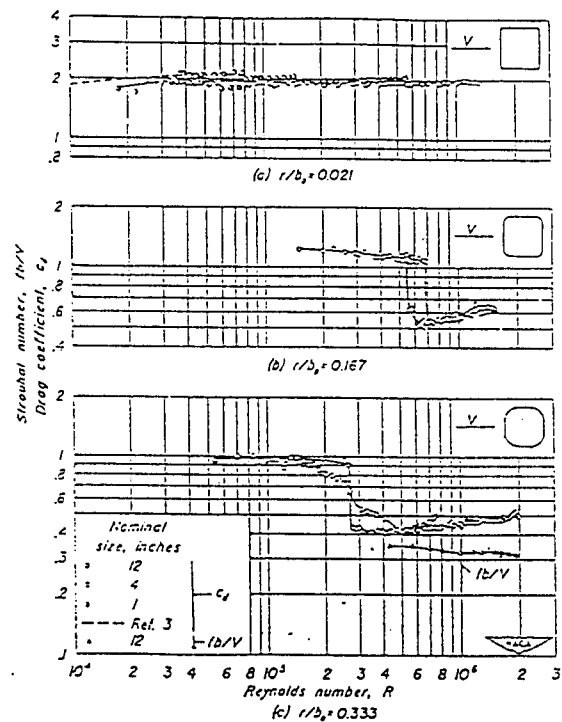


Figure 8.—Variation of drag coefficient and Strouhal number with Reynolds number for the 1:1 fineness ratio rectangular cylinders.

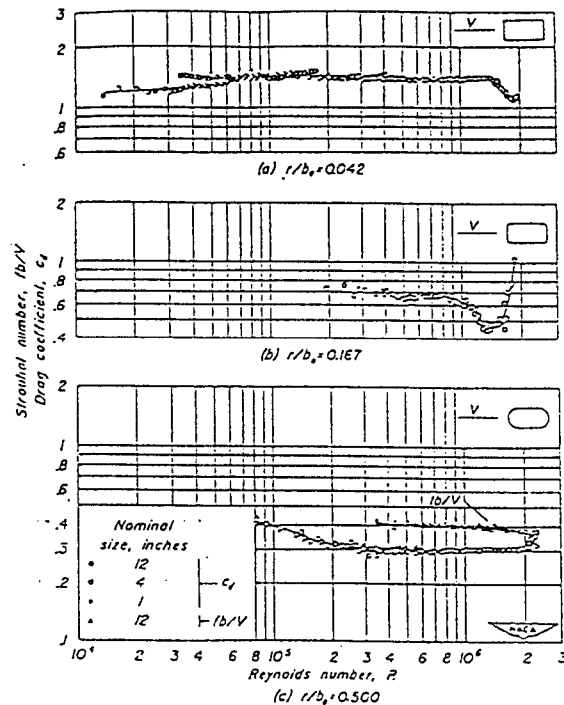


Figure 9.—Variation of drag coefficient and Strouhal number with Reynolds number for the 2:1 fineness ratio rectangular cylinders.

Dragkoeffisient, C_D for forskjellige pongtong-tverrsnitt.

Table 6.1 Added mass coefficients for two-dimensional bodies, i.e. infinitely long cylinders.

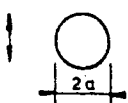
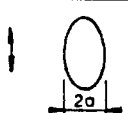
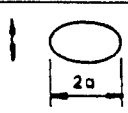
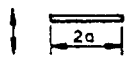
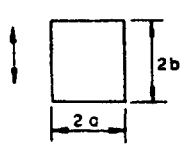
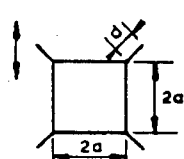
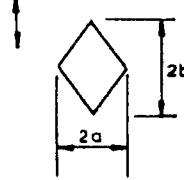
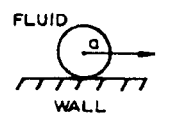
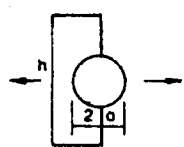
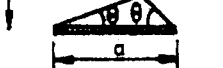
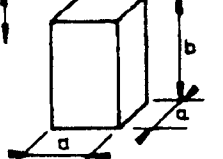
Section through body	Direction of motion	C_m	V_R
	Vertical	1.0	πa^2
	Vertical	1.0	πa^2
	Vertical	1.0	πa^2
	Vertical	1.0	πa^2
 $a/b = \infty$ $a/b = 10$ $a/b = 5$ $a/b = 2$ $a/b = 1$ $a/b = 0.5$ $a/b = 0.2$ $a/b = 0.1$	Vertical	1.0 1.14 1.21 1.36 1.51 1.70 1.98 2.23	πa^2
 $d/a = 0.05$ $d/a = 0.10$ $d/a = 0.25$	Vertical	1.61 1.72 2.19	πa^2
 $a/b = 2$ $a/b = 1$ $a/b = 0.5$ $a/b = 0.2$	Vertical	0.85 0.76 0.67 0.61	πa^2
	Horizontal	2.29	πa^2
	Horizontal	$1 + \left(\frac{h}{2a} - \frac{2a}{h} \right)^2$	πa^2

Table 6.2 Added mass coefficient for three-dimensional bodies.

Body shape		Direction of motion	C_m		V_R
Flat plates	Circular disc 	Vertical	0.64		$\frac{4}{3} \pi a^3$
	Elliptical disc 	Vertical	b/a	C_m	$\frac{\pi}{6} a^2 b$
			∞ 12.75 7.0 3.0 1.5 1.0	1.0 0.99 0.97 0.90 0.76 0.64	
	Rectangular plates 	Vertical	b/a	C_m	$\frac{\pi}{4} a^2 b$
			1.0 1.5 2.0 3.0 ∞	0.58 0.69 0.76 0.83 1.00	
	Triangular plates 	Vertical	$\frac{1}{\pi} (\tan \eta)^{3/2}$		$\frac{a^3}{3}$
Bodies of revolution	Spheres 	Any direction	0.5		$\frac{4}{3} \pi a^3$
	Ellipsoids 	Lateral or axial	a/b	C_m	$\frac{4}{3} \pi a^2 b$
			1.5 2.0 2.51 3.99 6.97 9.97	Axial 0.30 0.21 0.16 0.08 0.04 0.02	
Square prisms		Vertical	b/a	C_m	$a^2 b$
			1 2 3 4 5 6 7 10	0.68 0.36 0.24 0.19 0.15 0.13 0.11 0.08	

6.1.4 In the cases where Morison's equation is applicable the drag force may be calculated by the formula:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D v_r |v_r| A$$

where

F_D = drag force normal to the axis of the member.

C_D = drag coefficient for the flow normal to the member axis.

ρ = mass density of liquid.

v_r = liquid particle velocity relative to the member normal to the member axis.

$|v_r|$ = absolute value of v_r introduced to obtain proper sign of F_D .

A = area of member taken as the projection on a plane normal to the force direction.

6.1.5 The current induced drag forces are to be determined in combination with the wave forces. This may be done by vector addition of wave and current induced particle velocities. If available, computations of the total particle velocities and accelerations based on more exact theories of wave/current interaction will be preferred.

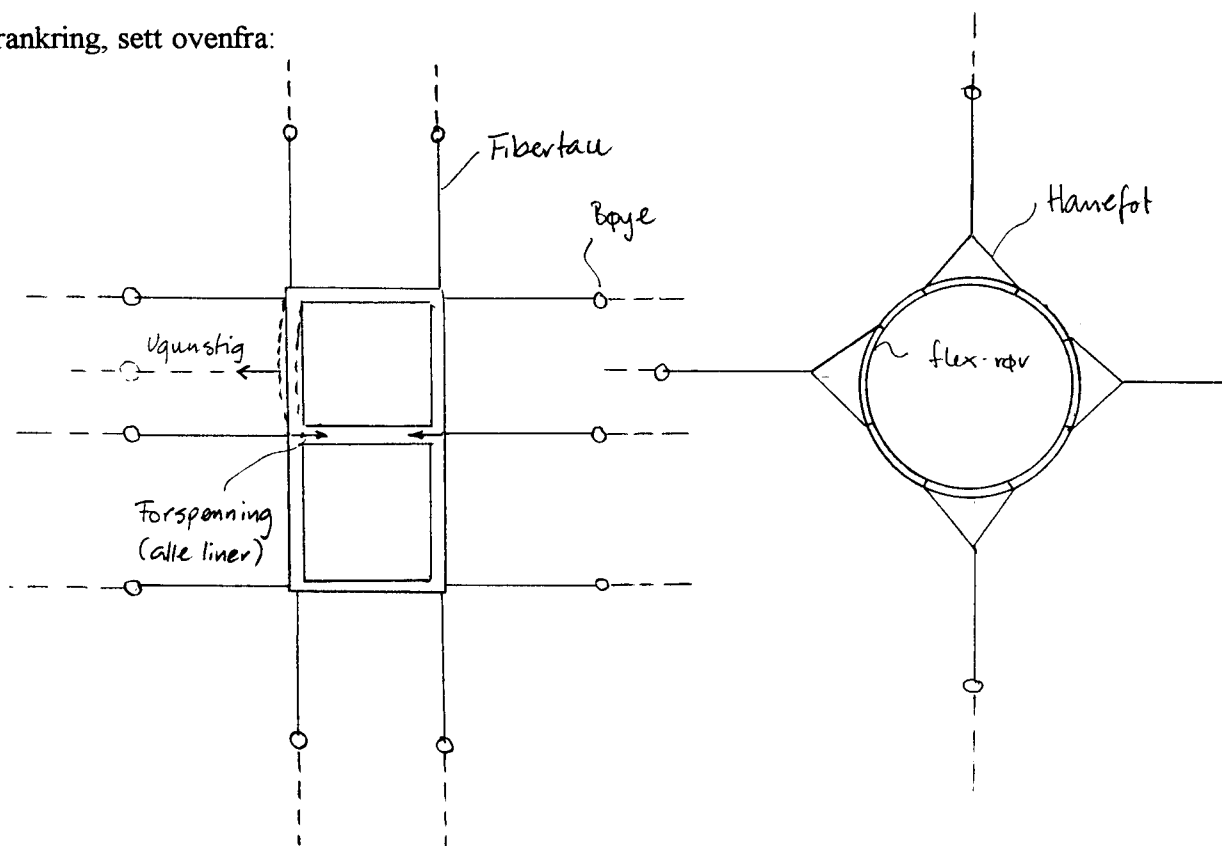
6.1.6 When using Morison's equation to calculate the hydrodynamic loads on a structure one should preferably take into account the variation of C_D as function of Reynold's number, the Keulegan-Carpenter number and the roughness

6. FORANKRING

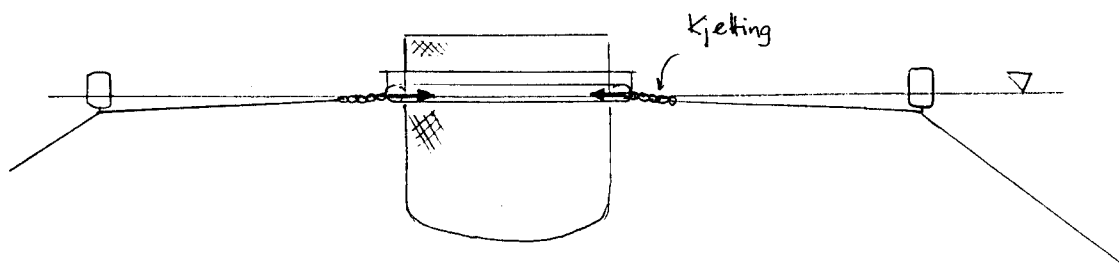
6.1 TYPISK FORANKRING

Forankringssystemer for flytende oppdrettsanlegg er ganske omfattende. Hovedfunksjon er å holde anlegget på en noenlunde fast posisjon, uansett vær og vind. Dette krever at linene forspennes tilstrekkelig. Normalt har flytende anlegg relativt liten oppdrift. Forat ikke strekkraftene fra ankerlinene skal trekke anlegget under, er det vanlig å la ankerlinene gå via oppdriftsbøyer, slik at linestrekking inn på anlegget går mest mulig horisontalt.

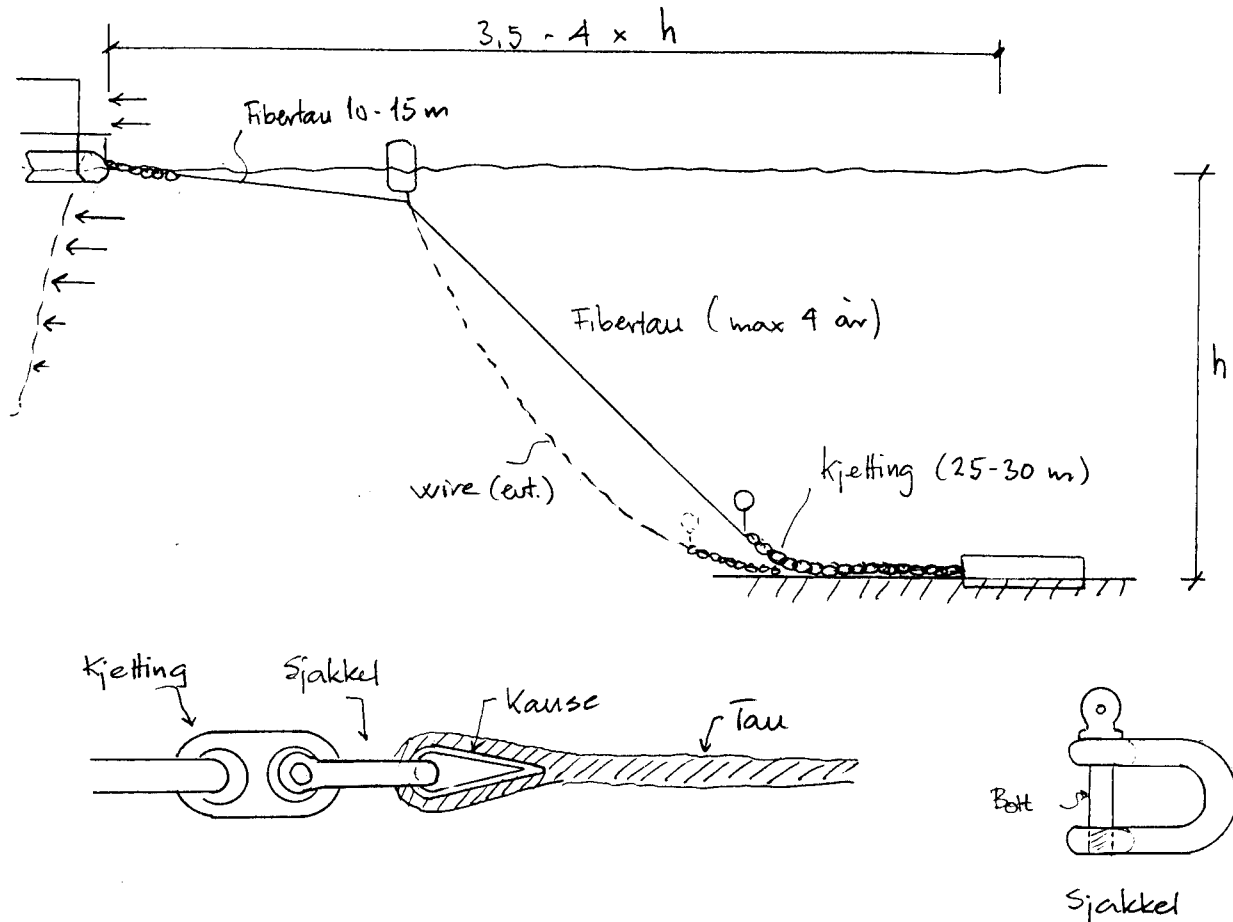
Typisk forankring, sett ovenfra:



Sett fra siden:



En hel line:



Dersom ankerlinene består av fibertau bør horisontalavstanden til ankerne være ca. 3.5 - 4 ganger vanddypet på det stedet hvor ankeret ligger. Vertikalkraften på bøyen og evt. også anker blir dermed moderat. Brukstiden på fibertau (eller wire) bør ikke overskride 4 år.

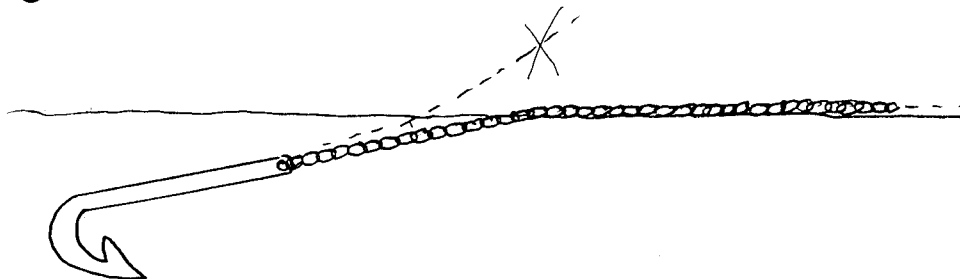
Ved overgangen til ankeret bør det brukes tung kjetting (25-30 m), både for å hindre gnaging, og for evt. å øke fjæringseffekten i systemet, og for å hindre/begrense vertikal belastning på ankeret. En bøye i overgang kjetting og tau, vil forhindre at tauet gnages av ved bunnen.

Sjakler og kauser må brukes i endene av fibertau og wirer, for å hindre slitasje. Inn mot anlegget kan det være hensiktsmessig å bruke kjetting for å kunne justere forspenningen, ved å feste sjakkelet i den lenken som gir ønsket forspenning.

6.2 ANKRE

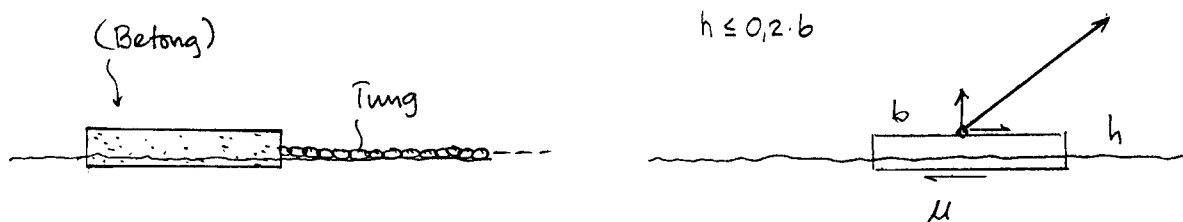
Forskjellige ankertyper er vist i vedlegget. Her beskrives de vanligste.

6.2.1 Drag-anker



Drag-anker brukes på sandbunn (grus, gjørme). Det har stor holdekraft i forhold til vekt. Det er lett å håndtere. Løftes hele ankerlinen fra bunnen slik at ankeret også får vertikalkraft, begynner det å tape holdekraften. Normalt skal beregning påvise at det ikke skjer.

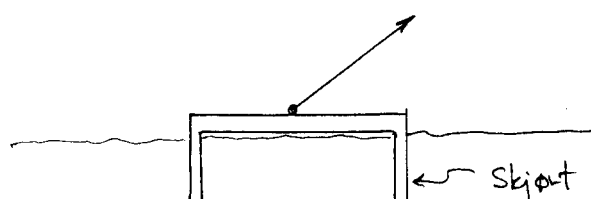
6.2.2 Tyngdeanker



Tyngdeanker kan ha innfesting både «oppå», og på siden. De holder ved sin egen vekt, det vil si ved friksjonskraft. Friksjonskoeffisienten kan variere fra $\mu = 0.1 - 0.5$ (leirbunn 0.3). Tyngdeankre har liten holdekraft i forhold til vekt, men er relativt rimelig å lage (betong). For å oppnå god holdekraft, må vekten være stor. De blir dermed tunge å håndtere.

6.2.3 Spesialankre

Dette kan være peler (i fjell), plater (i sand e.l.), sugeanker (vakuumanker), se vedlegg. Sugeanker (forutsetter sandbunn e.l.) er iferd med å tas i bruk også offshore. Det har relativt liten vekt, men likevel stor holdekraft, ikke bare horisontalt, men også vertikalt. Det er derfor godt egnet også når linen går skrått ned på ankeret (kunstfiberline).



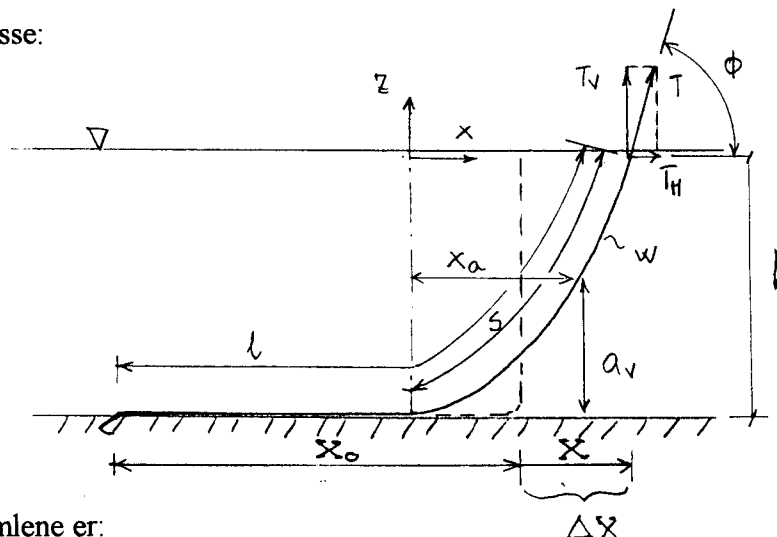
6.3 LINEKARAKTERISTIKK

Linekarakteristikken er en kurve som viser sammenhengen mellom forskyvning av en ankerlines topp-punkt (ΔX - horisontalt), og den kraften som påføres (T_H - horisontalt). Dette er en sammenheng som kan beregnes. For enkle system kan dette gjøres ved håndregning. Formlene er forskjellige om ankerlinen har større egenvekt enn vann (wire, kjetting), eller om den har tilnærmet lik egenvekt (kunstfiber).

6.3.1 Kjetting og/eller wire

Kjetting og wire har egenvekt vesentlig høyere enn vann. Linekarakteristikken kan beregnes vha. kjedelineformlene. Disse krever litt plass å utlede, og det skal ikke gjøres her. Forutsetningene for bruk av formlene er bl.a. at elastisiteten i linene kan neglisjeres, bunnen er flat, forskyvningene foregår så sakte at kreftene som virker i linen kan regnes som om linene var i ro (kvasistatisk metode («liksumstatisk»)).

Definisjonsskisse:



Kjedelinjeformlene er:

- Vertikal kraftkomponent ved toppunkt:

$$T_v = w \cdot s \quad [\text{kg}] \quad - \text{ hvor } s \text{ er fri linelengde (m), og } w \text{ er vekt i vann (kg/m)}$$

For kjetting er $w = 0.87 \cdot w_{\text{luft}}$. For wire er $w \approx 0.81 \cdot w_{\text{luft}}$

- Horisontal kraftkomponent ved toppunkt:

$$T_H = w \cdot \left[\frac{s^2 - h^2}{2h} \right] \quad - \text{ hvor } h \text{ er vertikalavstanden fra bunn til linens toppunkt}$$

- Total strekkraft i line ved toppunkt:

$$T = T_H + w \cdot h$$

6. Forankring

- Linens vinkel ved toppunkt:

$$\phi = \alpha \cos\left(\frac{T_H}{T}\right)$$

- Avstand (horisontalt) fra linens kontaktpunkt med bunn, og toppunkt:

$$x = \frac{T_H}{w} \cdot \ln\left[\frac{T}{T_H} + \sqrt{\left(\frac{T}{T_H}\right)^2 - 1}\right]$$

- Avstand (horisontalt) fra anker til toppunkt:

$$X = l - s + x \quad - \text{ hvor } l \text{ er total linelengde (m)}$$

- Absolutt forskyvning (horisontalt) av toppunktet:

$$\Delta X = X - X_0 \quad - \text{ hvor } X_0 \text{ er avstanden i utgangspunktet (se skisse)}$$

- Vertikal avstand til et punkt på linen, i en horisontalavstand x_a fra bunnpunktet:

$$a_v = \frac{T_H}{w} \left[\cosh\left(\frac{w \cdot x_a}{T_H}\right) - 1 \right]$$

- Bruddsikkerhet:

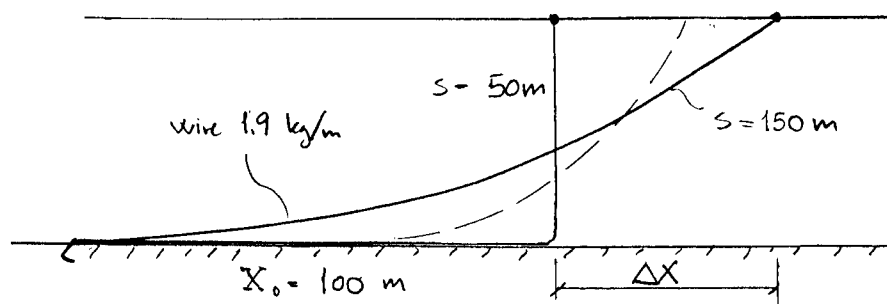
$$R = \frac{T_B}{T} \geq 3 \quad (2)^{1)}$$

- hvor T_B er linens bruddgrense (¹⁾ ved analyse av skadet system - dvs. en line brutt. 3 gjelder ved alle liner intakt)

Alle krefter har enhet [kg] (eller tonn). Kraft er altså uttrykt i vekt. Dette har sannsynligvis årsak i tradisjon.

Den praktiske bruken av formlene, illustreres ved følgende eksempel.

6.3.1.1 Eksempel 1 - Linekarakteristikk for wireline



Wirelinen har dia. 26 mm, vekt i vann er 1.9 kg/m, bruddstyrke 34 tonn. Total linelengde som legges ut er 150 m. Vanddyptet er 50 m, slik at i utgangspunktet er fri linelengde $s = 50$ m. Så forskyves toppunktet stepvis, inntil hele linen er løftet opp fra bunnen. Da er $s = 150$ m. Da får vi vertikal kraft på ankeret, og det er uaktuelt å strekke linen mer. For hvert «step» beregnes de ønskede størrelser, linekrefter m.m.

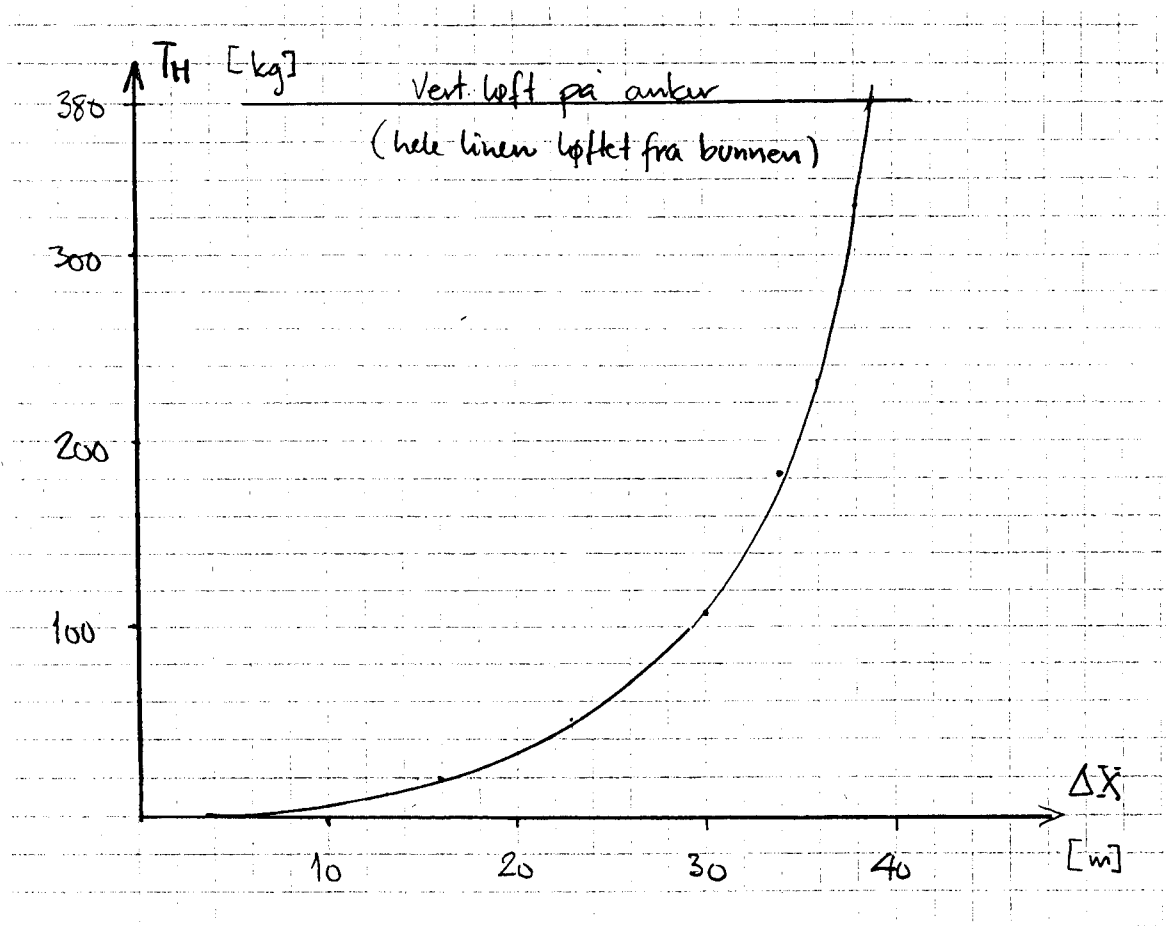
Vi deler inn fri linelengde i f.eks. 10, slik at økningen i fri linelengde for hvert «step», blir:

$$\Delta s = \frac{150 - 50}{10} = 10 \text{ m}$$

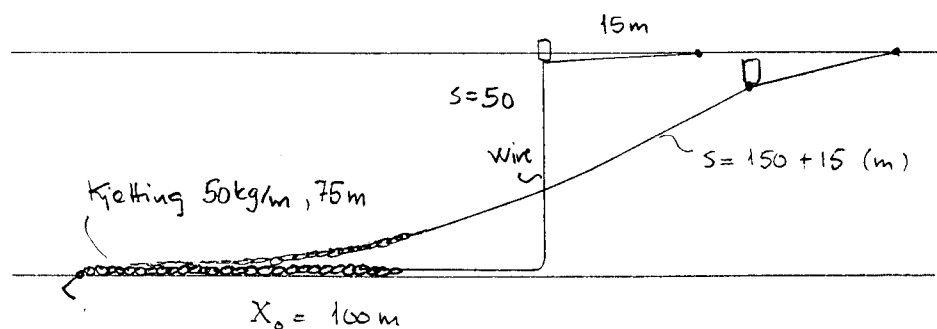
De beregningene vi gjør av linekrefter etc., gjøres for $s_0 = 50$ m, $s_1 = 50 + 10 = 60$ m, $s_2 = 60 + 10 = 70$ m,, $s_{10} = 140 + 10 = 150$ m, og settes opp i tabell:

i	s_i	T_{Hi}	T_{Vi}	T_i	X_i	Δx_i	ϕ_i
[-]	[m]	[kg]	[kg]	[kg]	[m]	[m]	[°]
0	50	0	95	95	100	0	90
1	60	21	114	116	116	16	80
2	70	46	133	141	123	23	71
3	80	74	152	169	127	27	64
4	90	106	171	201	130	30	58
5	100	143	190	238	132	32	53
6	110	182	209	277	134	34	49
7	120	226	228	321	136	36	45
8	130	274	247	369	137	37	42
9	140	325	266	420	138	38	39
10	150	380	285	475	139	39	37

Karakteristikken (T_H vs. ΔX) er tegnet opp på neste side. Denne gir et uttrykk for en ankerlines *stivhet* mht. horisontalforskyvning. Siden elastisiteten er liten (og neglisjert i beregningene), gir denne sammenhengen kun den såkalte *geometriske stivhet*. Kreftene i linene er kun avhengig av linens geometri (hvorledes den henger) til enhver tid.



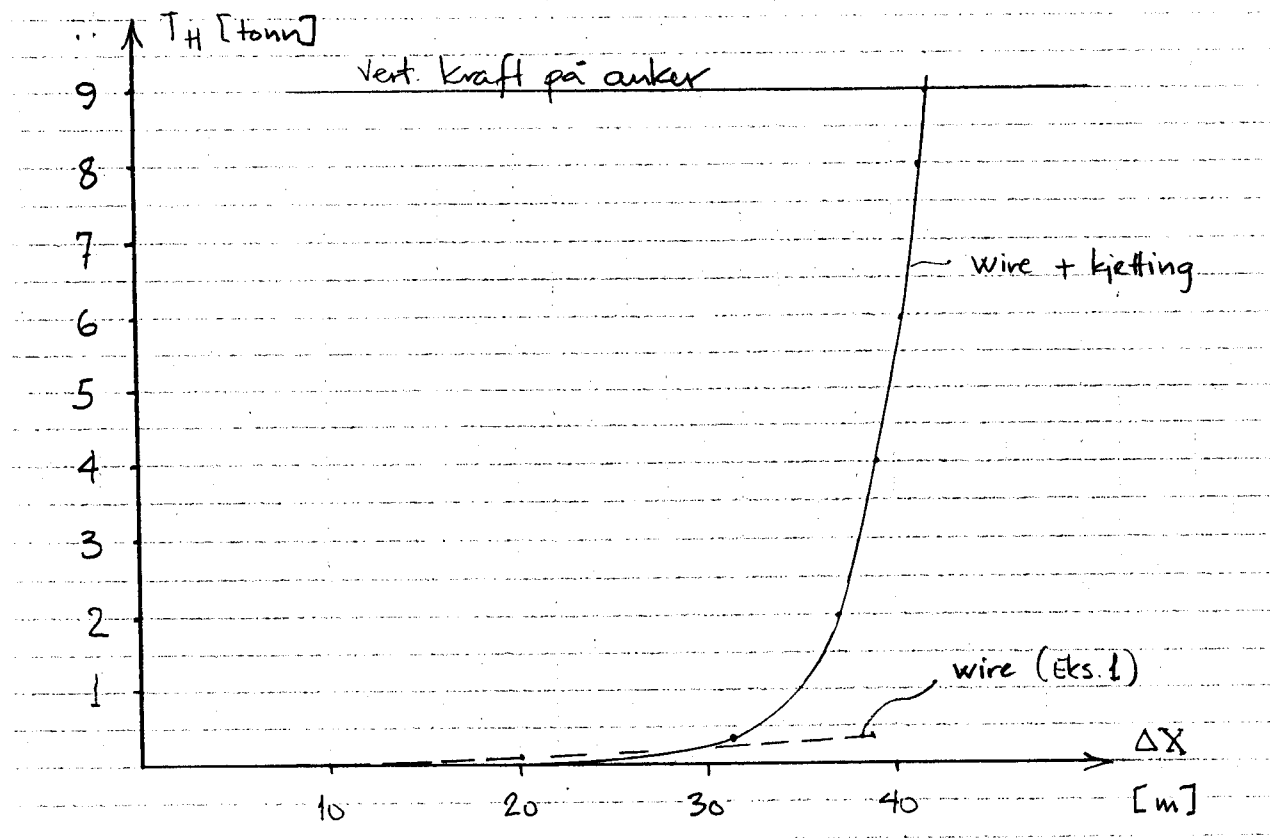
6.3.1.2 Eksempel 2 - Linekarakteristikk for wireline, kjetting og bøye



Dersom vi erstatter halvparten av wiren med tung kjetting (50 mm, 50 kg/m i vann, bruddstyrke 140 tonn) får vi en helt annen karakteristikk enn i Eksempel 1. Vekten av kjettingen vil gi store vertikalkrefter på anlegget. Dersom det har liten oppdrift, må det brukes en oppdriftsbøye (her 1 m³) for at ikke anlegget skal dras under. Bøyen ligger 15 m fra anlegget, forbundet med tau.

Å beregne linekarakteristikken for hånd lar seg praktisk talt ikke gjøre i dette tilfellet. Kjedelinjeformlene gjelder for hvert linesegment, men man må ty til iterasjon for å finne hvor linesegmentene starter og slutter. Dette må gjøres for hvert «step» i beregningen av linekarakteristikken, og forutsetter i praksis bruk av datamaskin.

For eksempelet over, gir data-analysen følgende resultat (her tas det også hensyn til at bøyen trekkes under):



Pga. den store vekten av kjettingen, kan vi påføre adskillig mer horisontalkraft enn i Eksempel 1 (tegnet inn her for sammenligning), før vi får vertikal kraft på ankeret. Karakteristikken fra Eksempel 1 vil i praksis ikke være til stor nytte. Det kan jo virke overdimensjonert med slike kjettingdimensjoner (og wire også for den del), men kan være nødvendig pga. av vekten. Alternativt kan det henges på klumpvekter innimellom.

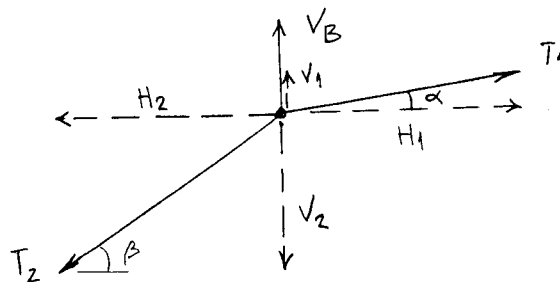
Vertikalkomponenten (nedover) av linekraften i innfestingspunktet må nødvendigvis bli relativt stor, når lengden av den tunge kjettingen er så stor som her. Denne kraften vil «spise opp» noe av anleggets oppdrift. Når hele linen er løftet opp fra bunnen, må denne kraftkomponenten nødvendigvis være:

$$\begin{aligned}
 T_V &= w \cdot s|_{kjetting} + w \cdot s|_{wire} - O_{bøye} \\
 &= 50\text{kg} \cdot 75\text{m} + 1.9\text{kg} \cdot 75\text{m} - 1025\text{kg} = \underline{2.8\text{ tonn}}
 \end{aligned}$$

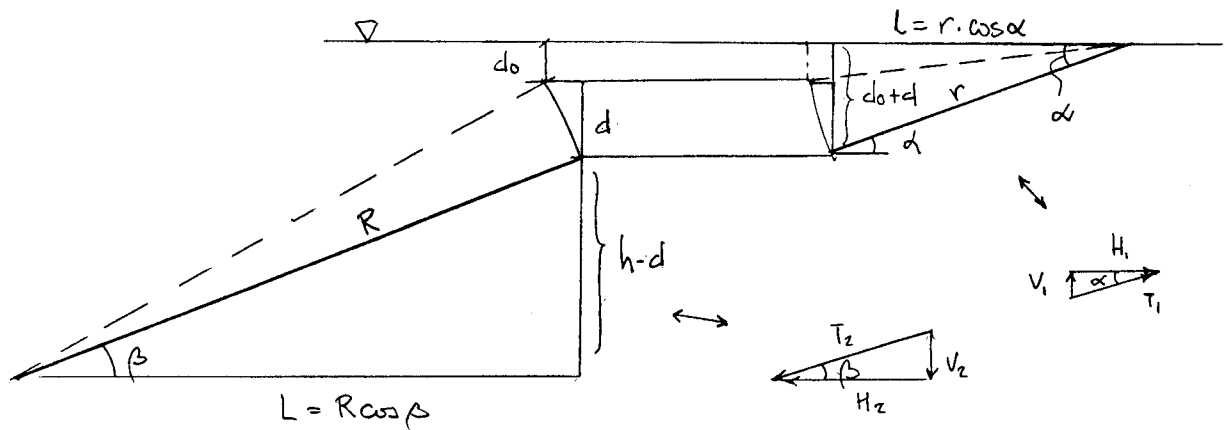
Fibertau (og andre tau) er tilnærmet «vektløse» i vann. Kjedelinjeformlene kan ikke brukes. De har normalt vesentlig større elastisitet enn wire og kjetting. Den totale stivheten til fibertauliner vil da ikke bare bestå av *geometrisk stivhet*, men også *elastisk stivhet*.

$$\begin{aligned} d < 1 \text{ m: } & V_B \approx d \text{ [tonn]} \\ d > 1 \text{ m: } & V_B = 1 \text{ [tonn]} \end{aligned}$$

De kreftene som virker i «løkken» under bøyen er linestrekket langs line 1 (T_1), linestrekket langs line 2 (T_2), og den vertikale oppdriftskraften i bøyen (V_B):



T_1 og T_2 har sine horisontalkomponenter og vertikalkomponenter H_1 , V_1 og H_2 , V_2 (dette er altså ikke tilleggs-krefter).



Linenes totale lengde blir:

$$R = \sqrt{L_0^2 + h^2}$$

$$r = \sqrt{l_0^2 + d_0^2}$$

Linevinklene vil til enhver tid være:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{d_0 + d}{r}\right)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{h-d}{R}\right)$$

Horisontalkomponentene av linelengdene vil alltid være:

$$l = r \cos \alpha$$

$$L = R \cos \beta$$

Sammenhengen mellom kraftkomponentene og linegeometri er:

$$\tan \alpha = \frac{V_1}{H_1} = \frac{d_0 + d}{l} \quad \left| \quad \tan \beta = \frac{V_2}{H_2} = \frac{h-d}{L} \quad \left(\approx \frac{h}{L} \right) \right.$$

$$\Rightarrow H_1 = V_1 \frac{l}{d_0 + d} \quad \left| \quad \Rightarrow V_2 = H_2 \frac{h-d}{L} \right.$$

Utfra kravet om statisk kraftlikevekt, har vi:

$$H_2 = H_1: \quad \Rightarrow \quad H_2 = V_1 \frac{l}{d_0 + d}$$

$$V_2 = V_1 + V_B: \quad \Rightarrow \quad H_2 \frac{h-d}{L} = V_1 + V_B$$

Setter vi uttrykket for H_2 (over) inn i den siste ligningen, får vi:

$$V_1 \frac{l}{d_0 + d} \cdot \frac{h-d}{L} = V_1 + V_B$$

$$\Rightarrow V_1 \frac{l}{d_0 + d} \cdot \frac{h-d}{L} - V_1 = V_B$$

$$\Rightarrow V_1 \left(\frac{l}{d_0 + d} \cdot \frac{h-d}{L} - 1 \right) = V_B$$

$$\therefore \quad V_1 = \frac{V_B}{\frac{h-d}{d_0 + d} \cdot \frac{l}{L} - 1}$$

Forøvrig er:

$$T_1 = \sqrt{H_1^2 + V_1^2}$$

$$T_2 = \sqrt{H_2^2 + V_2^2}$$

Horisontalforskyvningen av linens toppunkt (innfesting på anlegget) har kun med geometriendring å gjøre (ikke elastisitet foreløpig), og er:

$$\Delta X_g = X - x = (L_0 - L) - (l_0 - l)$$

På basis av dette kan vi sette opp linekararakteristikken som funksjon av bøyens neddykning. Elastisitet er neglisjert, slik at dette bli ren *geometrisk* linekararakteristikk:

d	α	β	l	L	V_B	V_1	$H_1 = H_2$	V_2	T_1	T_2	ΔX_g
[m]	[$^\circ$]	[$^\circ$]	[m]	[m]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[m]
0	1.9	14.0	15.0	200	0	0	0	0	0	0	0
0.5	3.8	13.9	15.0	200.1	0.5	0.2	2.8	0.7	2.8	2.9	0.10
1	5.7	13.8	14.9	200.3	1	0.7	6.9	1.7	7.0	7.1	0.18
1.5	7.7	13.6	14.9	200.4	1	1.3	9.3	2.3	9.4	9.6	0.24
2	9.6	13.5	14.8	200.5	1	2.4	14.2	3.4	14.4	14.6	0.29

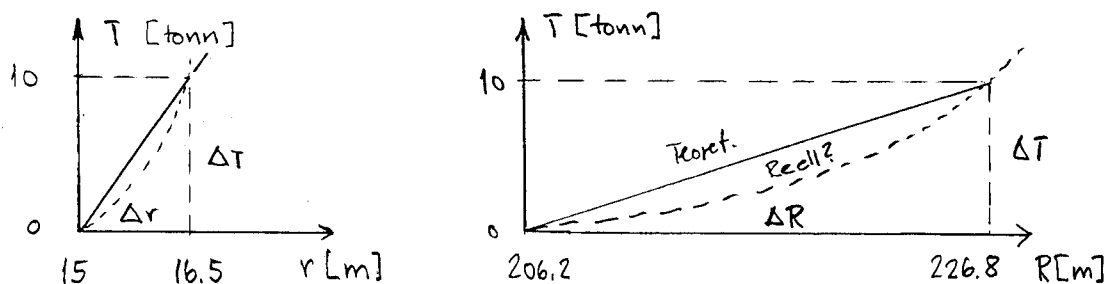
Vi ser at horisontalforskyvningen (ΔX_g) av linens toppunkt er forbausende liten. Ved en neddykning (d) av bøyen på to meter, har vi et linestrekk på hele $T_2 = 14$ tonn, men en horisontalforskyvning på bare $\Delta X_g = 0.29$ m. Slik blir det når linevinkel β er liten, og linene antas 100 % stiv. Med mye større linevinkel β (dvs. med ankrene mye nærmere anlegget), vil ΔX_g øke. Vi vil få en line som gir mye større fjæringseffekt (den geometriske stivheten blir mye lavere). Skal vi få noe fjæringseffekt å snakke om i dette tilfellet, må den hentes fra linenes elastisitet, se kap. 6.3.2.2.

6.3.2.2 Elastisk stivhet

Fibertau kan ha en forlengelse på 10 - 20 % ved en belastning på 50 % av bruddlast.

Forlengelsen er normalt ikkelineær, dvs. at den ikke øker proporsjonalt med kraften. Etterhvert som linene tøyes blir de mindre elastisk.

Her antar vi at linene er lineært elastisk. Vi antar at bruddlasten er 20 tonn, og at forlengelsen er 10 % ved 50 % av bruddlast. De to linene 1 og 2 har lengder $r = 15$ m og $R = 206.2$ m. Kraft / tøyningsrelasjonen blir slik:



Linenes fjærstivhet er forholdet mellom påført kraft og oppnådd forlengelse. Ved lineær elastisitet er de konstant, og lik:

$$k = \frac{\Delta T}{\Delta r} = \frac{10 \text{ tonn}}{1.5 \text{ m}} = 6.667 \frac{\text{tonn}}{\text{m}} \quad K = \frac{\Delta T}{\Delta R} = \frac{10 \text{ tonn}}{20.6 \text{ m}} = 0.485 \frac{\text{tonn}}{\text{m}}$$

Tøyningen av linene vil påvirke linevinklene, som igjen vil påvirke kreftene i linene. De verdiene som står i tabellen for geometrisk linekarakteristikk vil endres litt. Pga. små linevinkler blir endringene relativt små. Vi estimerer derfor økningen av linelengdene på bakgrunn av disse kreftene. Som funksjon av bøyens neddykning, blir de:

d [m]	T_1 [tonn]	$\Delta r = \frac{T_1}{k}$ [m]	T_2 [tonn]	$\Delta R = \frac{T_2}{K}$ [m]
0	0	0	0	0
0.5	2.8	0.4	2.9	5.9
1	7.0	1.0	7.1	14.6
1.5	9.4	1.4	9.6	19.8
2.0	14.4	2.2	14.6	30.1

6. Forankring

«Forenklet» karakteristik

Siden linevinklene er små kan vi som et første estimat for linekarakteristikken bruke de H_1 - kreftene som vi har fra geometrisk linekarakteristikk, og tilnærme horisontalforskyvningen med:

$$\Delta X \approx \Delta r + \Delta R + \Delta X_g \approx \Delta r + \Delta R$$

Da blir «forenklet» total linekarakteristikk (geometrisk stivhet er neglisjert):

d [m]	H_1 [tonn]	$\Delta X \approx \Delta r + \Delta R$ [m]
0	0	0
0.5	2.8	6.3
1	6.9	15.6
1.5	9.3	21.2
2.0	14.2	32.3

Første iterasjonstrinn

Vi kan øke nøyaktigheten ved å beregne karakteristikken på nytt, men nå med linelengder som er korrigert for elastisk forlengelse:

$$r = \Delta r + \sqrt{l_0^2 + d_0^2}$$

$$R = \Delta R + \sqrt{L_0^2 + h^2}$$

Alle de andre ligningene blir som før (se kap.6.3.2.1). Den totale linekarakteristikken blir nå (her er geometrisk stivhet inkludert, men den er praktisk talt neglisjerbar):

d	α	β	r	R	l	L	V_B	V_1	$H_1 = H_2$	V_2	T_1	T_2	ΔX
[m]	[°]	[°]	[m]	[m]	[m]	[m]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[m]
0	1.9	14.0	15.0	206.2	15.0	200	0	0	0	0	0	0	0
0.5	3.7	13.5	15.4	212.1	15.4	206.2	0.5	0.2	2.9	0.7	2.9	2.9	6.6
1	5.4	12.8	16.0	220.8	15.9	215.3	1	0.7	7.5	1.7	7.5	7.7	16.2
1.5	7.0	12.4	16.4	226.0	16.3	220.7	1	1.3	10.4	2.3	10.4	10.6	22.0
2	8.4	11.7	17.2	236.3	17.0	231.3	1	2.4	16.7	3.4	16.7	16.8	33.4

Vi kan ennå øke nøyaktigheten litt ved å gjennomføre de samme beregningene en gang til, men nå basert på T_1 og T_2 fra siste tabell. Da går vi over i andre *iterasjonstrinn*.

Andre iterasjonstrinn

d [m]	T ₁ [tonn]	$\Delta r = \frac{T_1}{k}$ [m]	T ₂ [tonn]	$\Delta R = \frac{T_2}{K}$ [m]
0	0	0	0	0
0.5	2.9	0.4	2.9	6.0
1	7.5	1.1	7.7	15.9
1.5	10.4	1.6	10.6	21.8
2.0	16.7	2.5	16.8	34.6

d	α	β	r	R	l	L	V _B	V ₁	H ₁ = H ₂	V ₂	T ₁	T ₂	ΔX
[m]	[°]	[°]	[m]	[m]	[m]	[m]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[m]
0	1.9	14.0	15.0	206.2	15.0	200	0	0	0	0	0	0	0
0.5	3.7	13.5	15.4	212.2	15.4	206.3	0.5	0.2	2.9	0.7	2.9	2.9	6.7
1	5.3	12.8	16.1	222.1	16.0	216.6	1	0.7	7.5	1.7	7.6	7.7	17.6
1.5	6.9	12.3	16.6	228.0	16.5	222.7	1	1.3	10.4	2.3	10.4	10.6	24.2
2	8.2	11.5	17.5	240.7	17.3	235.9	1	2.4	16.9	3.4	17.1	17.2	38.3

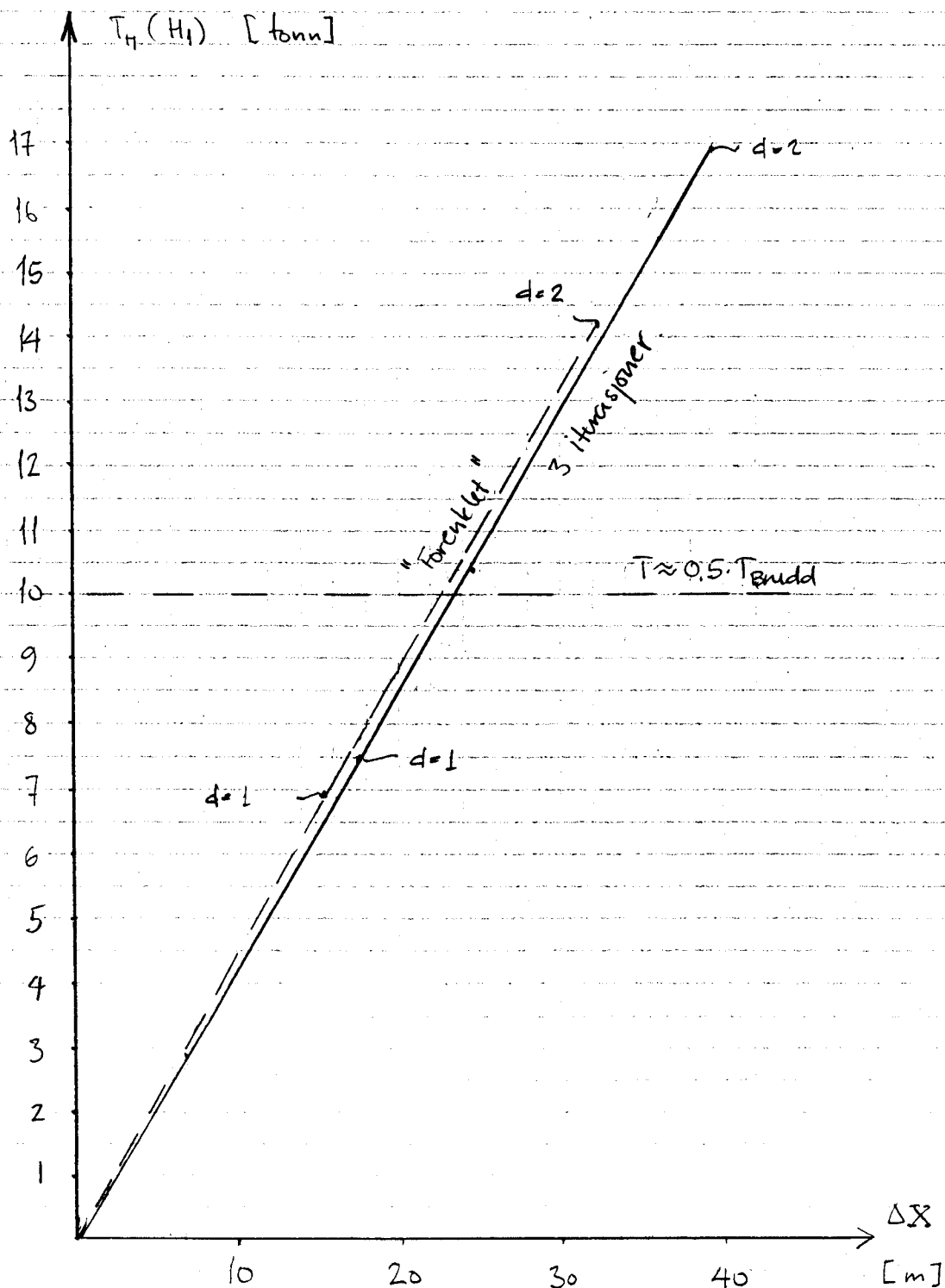
Tredje iterasjonstrinn

d [m]	T ₁ [tonn]	$\Delta r = \frac{T_1}{k}$ [m]	T ₂ [tonn]	$\Delta R = \frac{T_2}{K}$ [m]
0	0	0	0	0
0.5	2.9	0.4	2.9	6.0
1	7.6	1.1	7.7	15.9
1.5	10.4	1.6	10.6	21.9
2.0	17.1	2.6	17.2	35.5

d	α	β	r	R	l	L	V _B	V ₁	H ₁ = H ₂	V ₂	T ₁	T ₂	ΔX
[m]	[°]	[°]	[m]	[m]	[m]	[m]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[tonn]	[m]
0	1.9	14.0	15.0	206.2	15.0	200	0	0	0	0	0	0	0
0.5	3.7	13.5	15.4	212.2	15.4	206.3	0.5	0.2	2.9	0.7	2.9	2.9	6.7
1	5.3	12.8	16.1	222.1	16.0	216.6	1	0.7	7.5	1.7	7.6	7.7	17.6
1.5	6.9	12.3	16.6	228.0	16.5	222.8	1	1.3	10.4	2.3	10.5	10.6	24.3
2	8.2	11.5	17.6	241.7	17.4	236.8	1	2.4	16.9	3.4	17.1	17.2	39.3

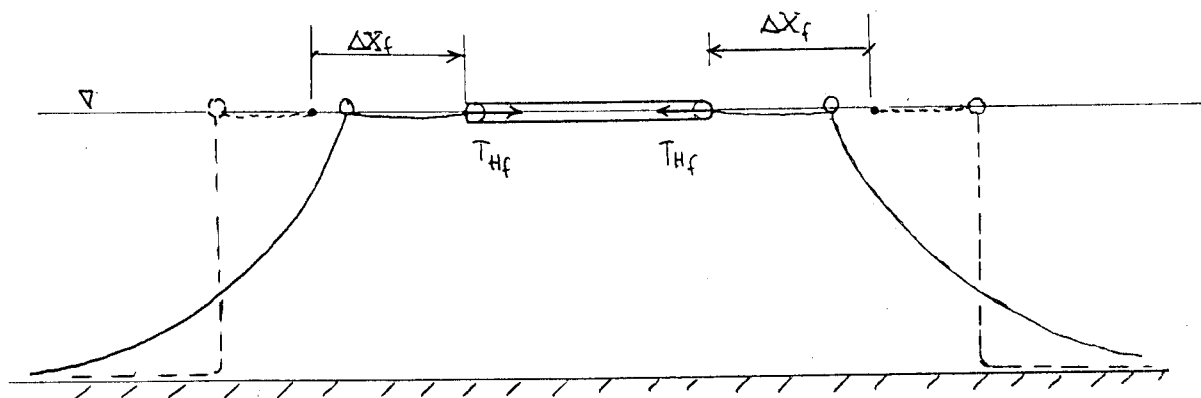
Gjennomfører vi et «tilstrekkelig» antall iterasjoner (3 er nok her), blir beregningen ganske nøyaktig, forutsatt at tauets elastisitet er lineær. Dersom elastisiteten er moderat ikkelineær, kan disse beregningene være gode nok. Alternativt må det gjøres en komplett ikkelineær analyse, hvor variasjonen til tauets fjærstivhet tas hensyn til. Dette blir for omfattende her.

Linekarakteristikken blir:



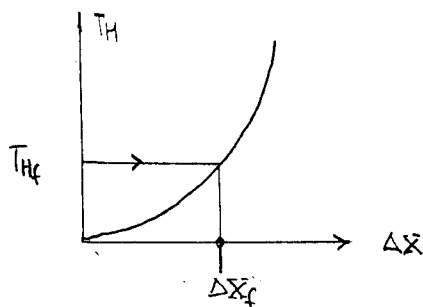
Karakteristikken basert på «forenklet» metode er også tegnet inn. Vi ser at stigningen til kurvene er praktisk talt lik. Største ulikheten knytter seg til neddykningen av bøyen, men dette er ofte ikke interessant i seg selv. «Forenklet» beregning kan være godt nok.

6.4 FORSPENNING OG SYSTEMKARAKTERISTIKK

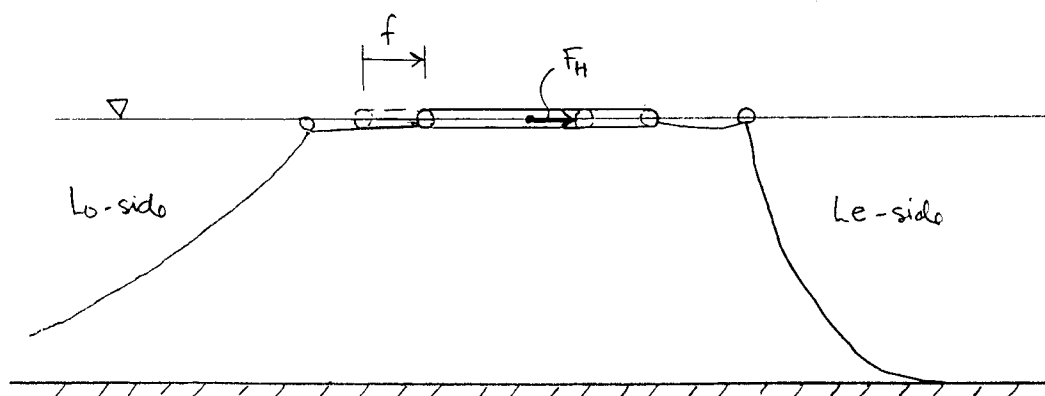


Vi ser på et linepar som vist i figuren over. Vi antar at linene er like på alle måter. De vil da ha samme linekarakteristikk. Linene er lagt ut på en slik måte at de har en forspenning (T_{Hf}) når anlegget ligger i «nøytral posisjon». Denne forspenningskraften må nødvendigvis være lik i begge liner, når det bare er ett linepar.

Ut fra forspenningskraften vet vi hvor «utgangspunktet» er på linekarakteristikken.

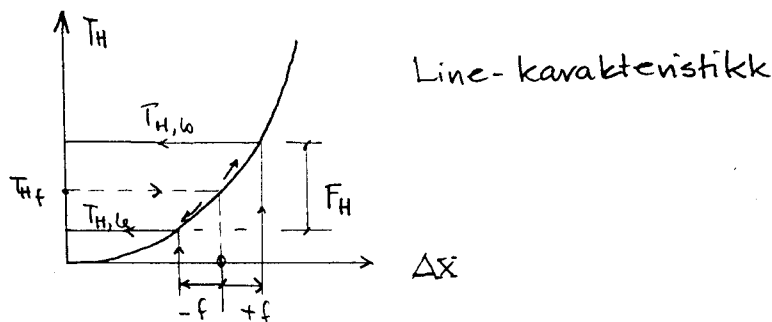


Vi gir anlegget en viss forskyvning, f , til høyre:



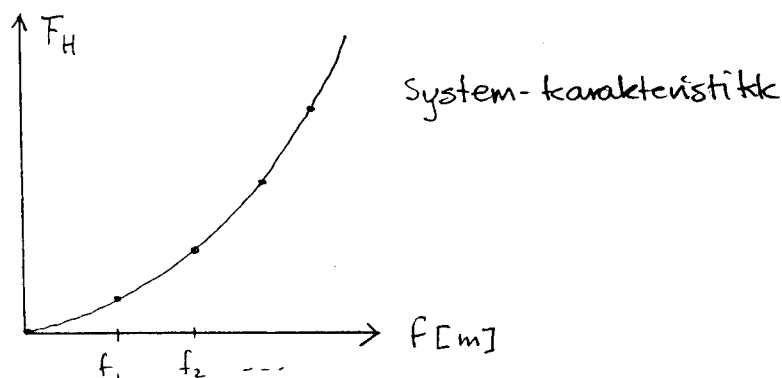
Lo-linen strammes, mens le-linen slakkes. Kraften i lo-linen finnes fra linekarakteristikken for forskyvningen $\Delta X_f + f$ (vi beveger oss *oppover* på karakteristikken). Kraften i le-linen finnes tilsvarende for $\Delta X_f - f$ (*nedover* på karakteristikken).

Den ytre horisontalkraften som skal til for å oppnå forskyvningen f , må nødvendigvis bli differansen mellom horisontalkreftene i lo- og le-line ved denne forskyvningen:



$$F_H = T_{H,lo} - T_{H,le}$$

Forskyves anlegget stepvis bortover, kan vi beregne de tilsvarende horisontalkreftene og sette det opp i en tabell, eller figur. Dette gir systemkarakteristikken for ett linepar:



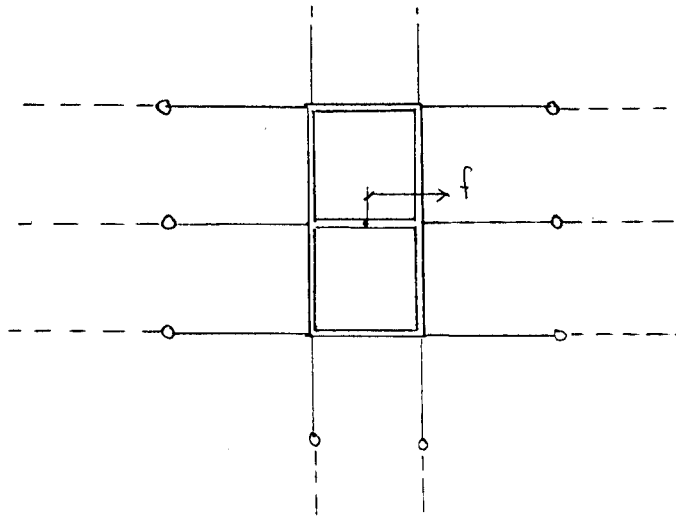
Normalt har vi flere linepar, og vi må selvsagt ta kraftbidraget fra disse med i den totale systemkarakteristikken. Dersom vi har N linepar, og alle liner har samme karakteristikk, får vi totalt:

$$F_H = N \cdot (T_{H,lo} - T_{H,le})$$

Systemkarakteristikken viser hvor stor forskyvning et anlegg får, når det påkjennes med en horisontal kraft. Karakteristikken vil være retningsavhengig, dvs. at den må beregnes for ulike forskyvningsretninger, og at den vil være ulik for hver retning.

Systemkarakteristikken bygger på linekarakteristikkene til hver line (disse trenger generelt ikke være like). Den er også avhengig av hvilken forspenning linene har i utgangspunktet. Endres forspenningen, må ny systemkarakteristikk beregnes.

6.4.1 Eksempel - Systemkarakteristikk

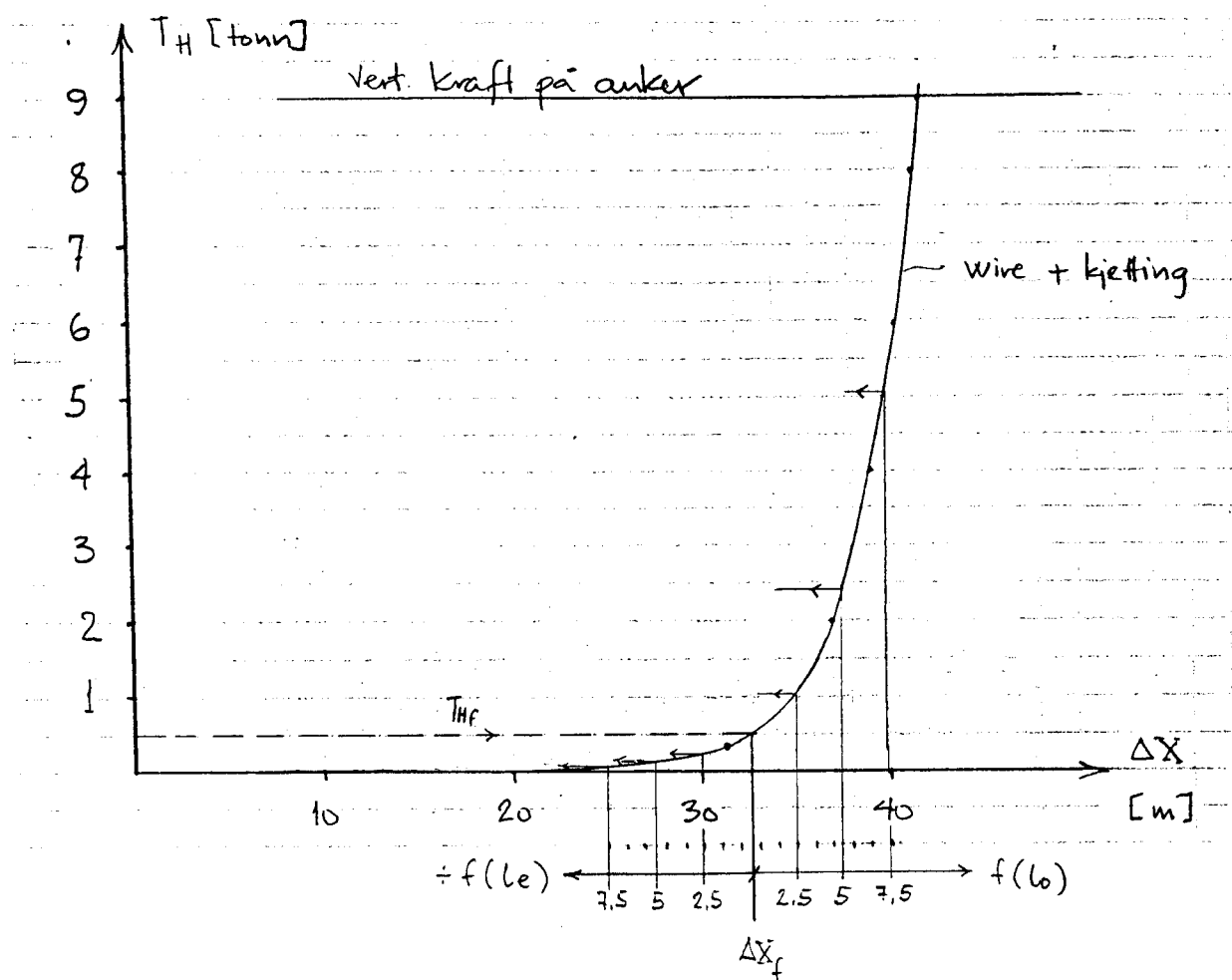


Linene i dette anlegget har samme karakteristikk, og er gitt i kap. 6.3.1.2 (wire, kjetting og bøye).

- Finn systemkarakteristikken når anlegget forskyves på tvers. Forspenningen er 0.5 tonn. Se bort fra de kreftene som linene ved kortsiden av anlegget forårsaker (normalt små krefter).
- Finn anleggets forskyvning når samlet kraft fra vind, bølger og strøm er 12 tonn.
- Finn horisontalkraften i linene ved denne forskyvningen, og kontroller om vi får vertikalkraft på ankeret.
- Vurder bruddsikkerheten.

Systemkarakteristikken:

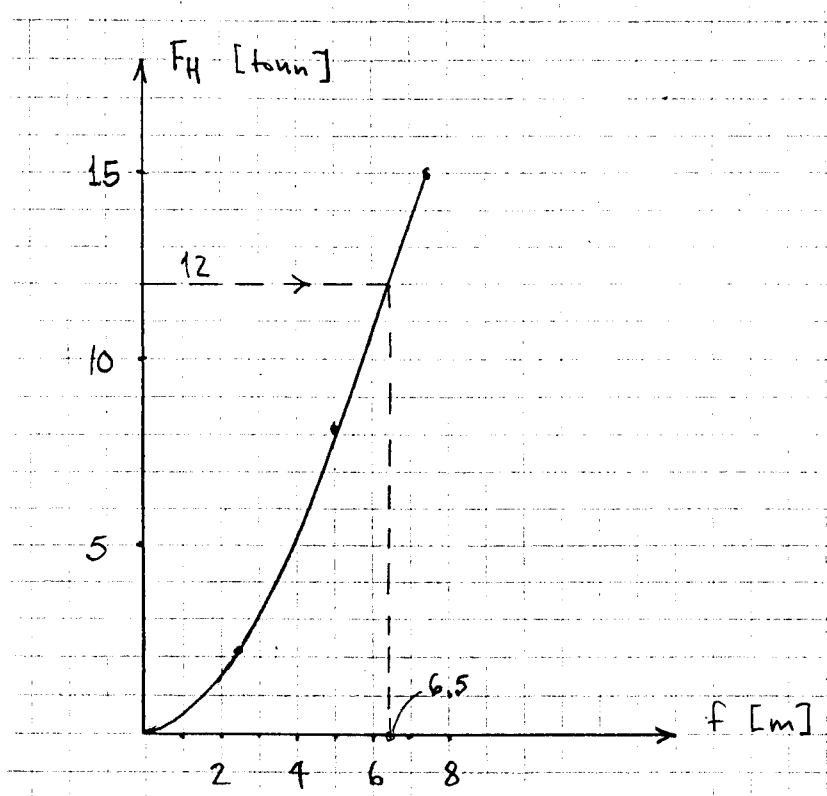
Vi finner utgangspunktet i karakteristikken utfra forspenningsverdien. Vi forflytter anlegget til posisjonene $f = 2.5$ m, 5 m, 7.5 m, og finner linekreftene (horisontalkomponentene) fra linekarakteristikken:



Vi finner:

f [m]	$T_{H,Jo}$ [tonn]	$T_{H,le}$ [tonn]	$T_{H,Jo} - T_{H,le}$ [tonn]	$F_H = 3 \cdot (T_{H,Jo} - T_{H,le})$ [tonn]
0	0	0	0	0
2.5	1	0.25	0.75	2.25
5	2.9	0.2	2.7	8.1
7.5	5.1	0.1	5	15

Systemkarakteristikken:



Anleggsforskyvning:

Vi går inn på systemkarakteristikken over, på vertikalaksen, med $F_H = 12$ tonn. Da får vi en horisontalforskyvning på ca. $f = 6.5$ m.

Horisontalkraft i linene:

Vi går inn i linekarakteristikken, og leser ut horisontalkreftene i linene (T_H) for forskyvningene $\Delta X + 6.5$ m (lo-line) og $\Delta X - 6.5$ m (le-line). Da får vi ca. $T_{H,lo} = 4$ tonn og $T_{H,le} = 0.15$ tonn. Vi må helt opp i 9 tonn for å få vertikalkraft på ankeret, og har stor margin.

Bruddsikkerhet:

Vi har ikke nok opplysninger til å kunne beregne bruddsikkerheten eksakt, fordi vi bare vet horisontalkomponenten av kraften (og ikke vertikal-komponenten, evt. totalstrekket). Vi må da ha flere opplysninger (tabell) fra data-analysen.

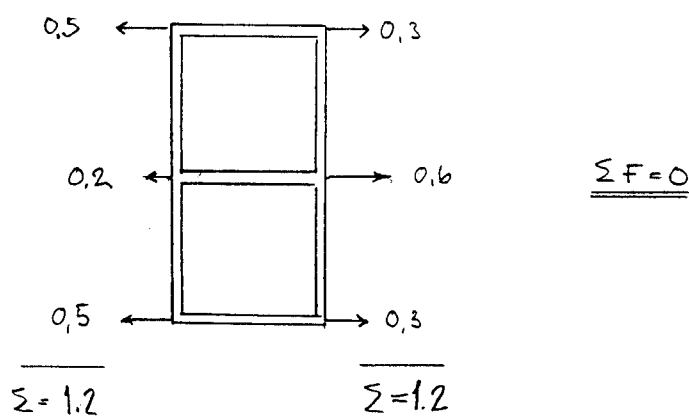
Dersom vi ser på bruddsikkerheten idet hele linen er løftet opp fra bunnen, vet vi at $T_H = 9$ tonn, og $T_V = 2.8$ tonn (se kap. 6.3.1.2). Da blir bruddsikkerheten:

$$R_B = \frac{T_B}{T} = \frac{T}{\sqrt{T_H^2 + T_V^2}} = \frac{34}{\sqrt{9^2 + 2.8^2}} = \frac{34}{9.42} = 3.6 \quad (> 3)$$

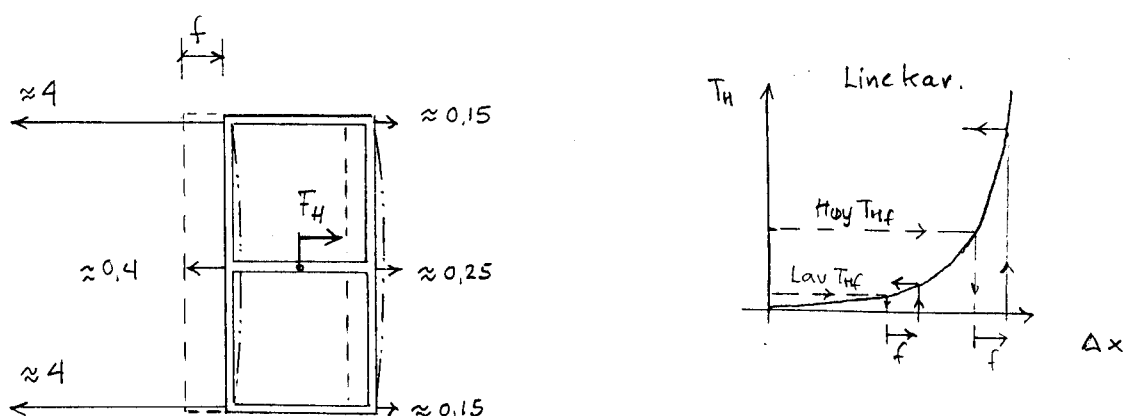
Ved $T_H = 9$ tonn er bruddsikkerheten tilstrekkelig. Det må den da også være ved $T_H = 4$ tonn, - anslagsvis ca. dobbelt så stor (ca. $R_B = 7$).

6.5 EFFEKT AV UJEVN FORSPENNING

Dersom det slurves med forspenningen, kan det medføre store forskjeller i linekreftene, når anlegget forskyves. Anta at anlegget fra forrige eksempel har forspenning i de ulike linene, som vist:



Anlegget er i statisk likevekt, totalt sett. Dersom anlegget forskyves horisontalt en avstand $f = 6.5$ m, får vi svært ulike linekrefter inn på anlegget:



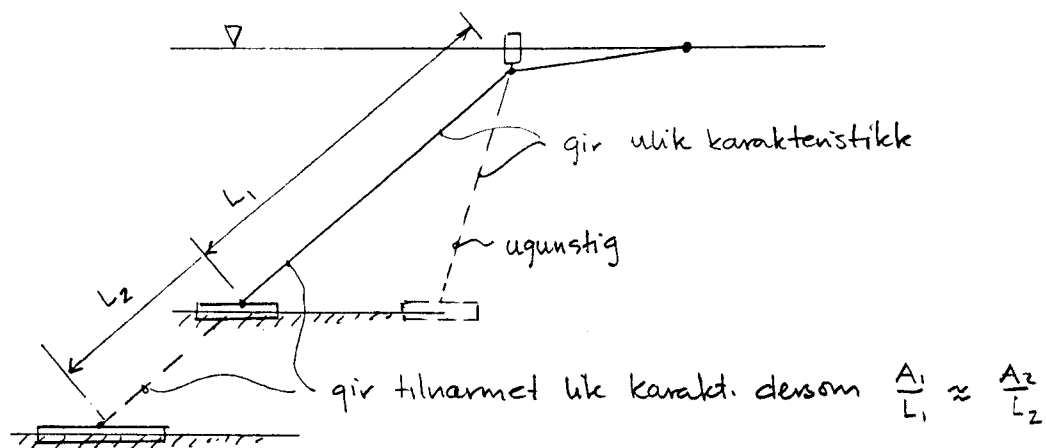
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_H = (4 + 4 + 0.4) - (0.15 + 0.15 + 0.25) = \underline{\underline{7.85 \text{ tonn}}}$$

Summen av kreftene er fortsatt lik null (statisk likevekt), men er så ulikt fordelt at belastningen på anlegget kan bli svært ugunstig.

De nye linekreftene er funnet fra linekarakteristikken etter nøyaktig samme prinsipp som i forrige eksempel (se **Horisontalkraft i linene**). Siden de er så ulikt forspent, blir utgangspunktet for avsetning av $f = 6.5$ m forskjellig, og da blir også linekreftene forskjellige. Siden linekarakteristikken blir bratt ved store forskyvninger, får de lo-linene som har høy forspenningsverdi relativt høye krefter.

Dersom linekarakteristikken er mer lineær i det aktuelle tøyingsområdet, blir dette problemet ikke så stort.

6.6 EFFEKT AV FEILPLASSERTE ANKRE



Vi forutsetter her fibertau-forankring. Det er tidligere påpekt at ankre bør plasseres i en avstand lik 3.5 - 4 ganger dypet hvor ankeret ligger. Da blir alle linevinkler like. Det er et første skritt mot å oppnå lik karakteristikk for linene. Men, selvom dette er oppfylt, og alle liner er av likt materiale, har samme tykkelse, og er tilnærmet lineært elastiske, vil linene få ulik karakteristikk, fordi den elastiske forlengelsen blir ulik.

Sammenhengen mellom kraft (F) og forlengelse (ΔL) er:

$$F = k \cdot \Delta L$$

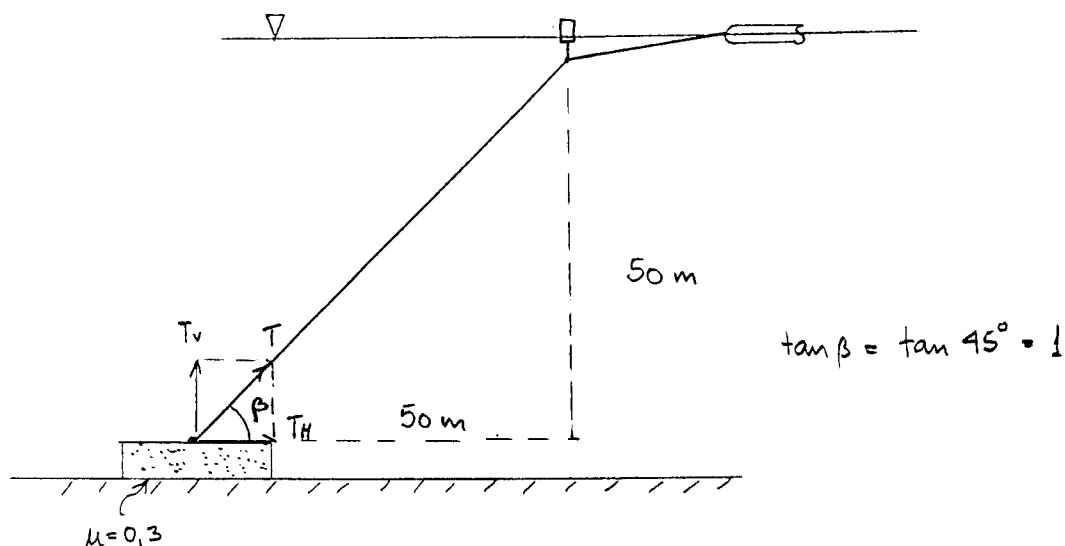
- hvor k er fjærstivheten $k = \frac{A \cdot E}{L}$. L er opprinnelig lengde, A er tverrsnittsareal, og E er elastisitetsmodul (E [N/mm²]).

For at forlengelsen skal bli lik for alle liner, uansett utlagt lengde, må k være lik. Antas samme linetype og tilnærmet lineær elastisitet, blir E lik. Da blir k (tilnærmet) lik for alle liner dersom:

$$\frac{A}{L} = \text{konst. for alle liner}$$

6.7 TYNGDEANKERES HOLDEKRAFT

Vi skal illustrere dette ved følgende eksempel. Ankeret er i dette tilfellet plassert «ekstremt galt» (altfor nær anlegget):



Vi forutsetter at ankeret er laget i betong, med tetthet $\rho_a = 2.5 \text{ tonn/m}^3$. Det veier 3 tonn i luft. Sjøvannets tetthet er $\rho_s = 1.025 \text{ tonn/m}^3$. Bøyens volum er $V_b = 1 \text{ m}^3$, slik at oppdriftskraften ved full neddykning blir $O_b = \rho_b \cdot V_b = 1.025 \text{ tonn}$.

Vi skal finne hvor stor horisontalkraft vi kan påføre linens toppunkt før ankeret mister holdekraften, når friksjons-koeffisienten mellom anker og bunn er $\mu = 0.3$.

Ankervekt i vann:

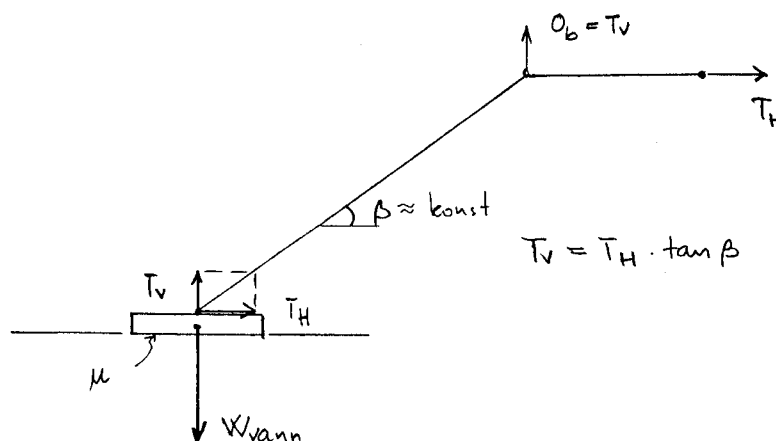
$$W_{\text{luft}} = \rho_a \cdot V = 3 \text{ tonn}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{vann}} &= W_{\text{luft}} - \text{Oppdrift} \\ &= \rho_a \cdot V - \rho_s \cdot V \end{aligned}$$

$$\frac{W_{\text{luft}}}{W_{\text{vann}}} = \frac{\rho_a \cdot V}{(\rho_a - \rho_s) \cdot V} = \frac{2.5}{(2.5 - 1.025)} = 1.69$$

$$\therefore W_{\text{vann}} = \frac{W_{\text{luft}}}{1.69} = \frac{3 \text{ tonn}}{1.69} = \underline{\underline{1.78 \text{ tonn}}}$$

Holdekraft:



Vertikalkomponenten av linestrekket vil «redusere» vekten av ankeret, og dermed redusere holdekraften. Max holdekraft horisontalt, blir:

$$\begin{aligned} T_{H,\max} &= \mu \cdot (W_{\text{vann}} - T_V) \\ &= \mu \cdot (W_{\text{vann}} - T_{H,\max} \cdot \tan \beta) \\ &= \mu \cdot W_{\text{vann}} - \mu \cdot T_{H,\max} \cdot \tan \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_{H,\max} (1 + \mu \cdot \tan \beta) = \mu \cdot W_{\text{vann}}$$

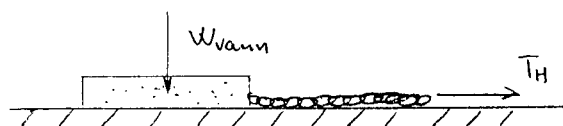
$$\Rightarrow \boxed{T_{H,\max} = \frac{\mu \cdot W_{\text{vann}}}{(1 + \mu \cdot \tan \beta)}}$$

Ved innsetting, får vi:

$$T_{H,\max} = \frac{0.3 \cdot 1.78}{(1 + 0.3 \cdot 1)} = \underline{\underline{0.41 \text{ tonn}}}$$

Dersom linen mellom bøyen og anlegget antas tilnærmet horisontal, vil vertikalkomponenten av linestrekket ned mot ankeret måtte stamme fra bøyens oppdrift. Ved denne linevinkelen er horisontal- og vertikalkomponenten like. Når $T_H = 0.41$ tonn, er $T_V = O_b = 0.41$ tonn. Dvs. at nå bøyen er ca. 41% nedykket, er de virkende kreftene slik at ankeret da taper holdekraften.

Ved bruk av tyngdeanker blir holdekraften noe bedre om vertikalkraften forhindres, ved å la linen gå via tung kjetting inn på siden av ankeret:

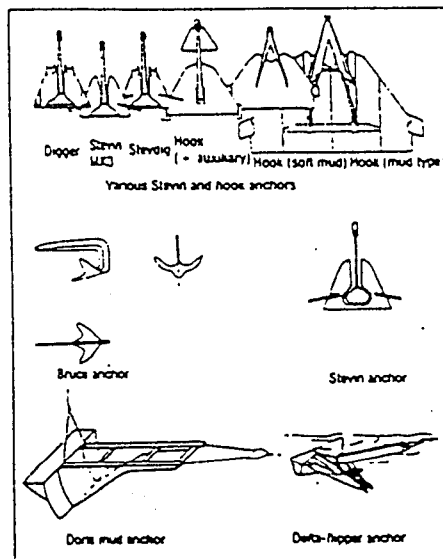
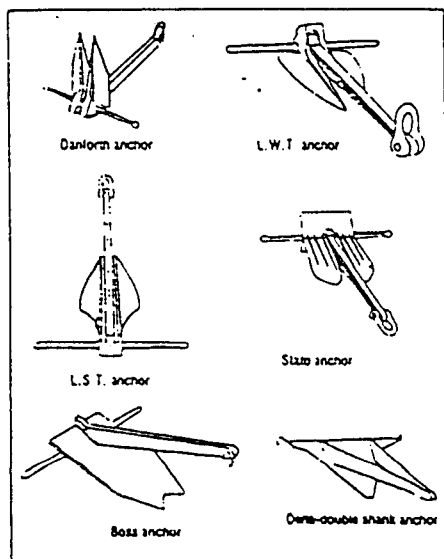
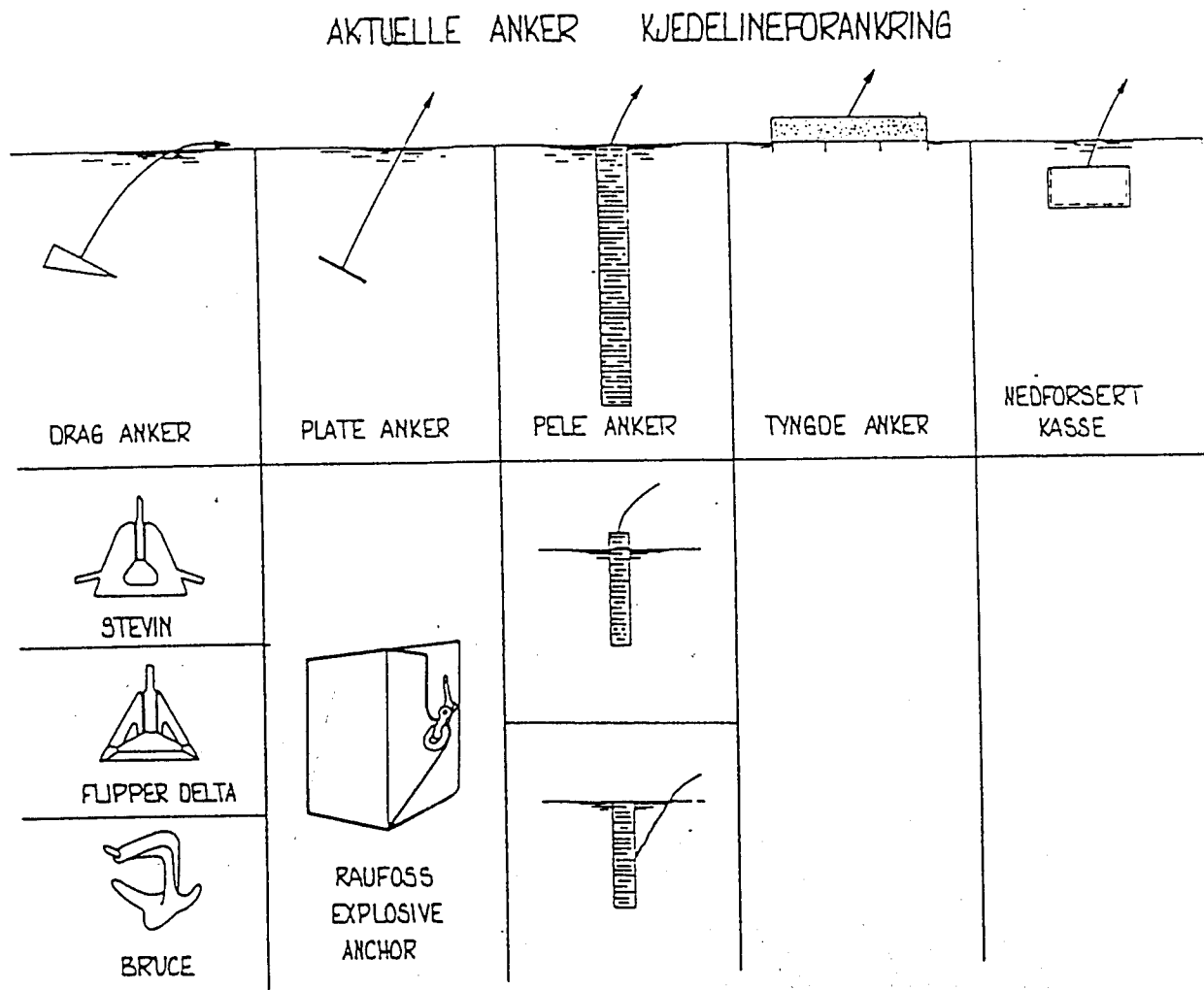


Holdekraften blir da ($\tan \beta = 0$) :

$$T_{H,\max} = \mu \cdot W_{\text{vann}} = 0.3 \cdot 1.78 = \underline{\underline{0.53 \text{ tonn}}}$$

6.8 VEDLEGG - ANKERTYPER

Vedlagte figur er hentet fra «Håndbok for design og dokumentasjon av åpne merdanlegg» (Marintek '94).



TILLEGG A

OM LINEÆR BØLGETEORI

Dette er ikke pensum, men er tatt med for å vise hvorledes de teoretiske beskrivelsene av hastighetspotensialet fra kap. 5 (og derav avledede størrelser) er utledet.

REGULÆRE BØLGER

Dette er et første forsøk på å et kompendium om regulære bølger. Det var ment å skulle omhandle flere bølgeteorier, men inntil videre er bare **lineær bølgeteori** (som til gjengjeld er den viktigste, generelt) blitt beskrevet. Det er heller ikke komplett mhp. lineær bølgeteori. Igjen må det advares mot at framstillingen kan inneholde feil. Dette har ikke gjennomgått noen form for kvalitetsvurdering fra andre parter enn undertegnede.

Ketil Roaldsnes
Bergen 06.03.99

I N N H O L D

Kapittel	Side
1. GRUNNLAG	1
1.1 KONTINUITETSLIGNINGEN	1
1.2 STRØMLINJER	2
1.3 VIRVLINGSFRI STRØM	4
1.4 LACLAKE'S LIGNING & POTENSIALTEORI	6
1.5 PARTIKKEL-AKSELERASJONER	7
1.6 EULERS LIGNINGER	8
1.6.1 Eulers dynamiske ligning	8
1.6.2 Eulers trykkligning	9
2. LINEÆR BØLGETEORI	12
2.1 POTENSIALFUNKSJONER	12
2.2 HASTIGHETSPOTENSIALET FOR BØLGER	13
2.2.1 Basis	13
2.2.2 Lineariseringer	14
2.2.3 Utledning av hastighetspotensialet	15
2.2.3.1 Anvendelse av Laplace's ligning	16
2.2.3.2 Anvendelse av kinematisk grenseflatebetingelse ved bunnen	17
2.2.3.3 Anvendelse av linearisert fri grenseflatebetingelse	18
2.2.3.4 Partikulærløsninger for hastighetspotensialet	19
2.2.3.5 Det endelige hastighetspotensialet	21
2.2.4 Hastighetspotensialet for dypt vann	23
2.2.5 Bølgehastigheter og frekvensrelasjoner	24
2.2.6 Partikkelbevegelser	25
2.2.6.1 Partikkelhastigheter	25
2.2.6.2 Partikkelakselerasjoner	26
2.2.6.3 Partikkelbaner	27
2.2.6.4 Spesielle forhold ved overflaten (-)	32
2.2.6.5 Virkeligheten (-)	32
2.2.7 Potensialkurver	33
2.2.8 Strømlinjer	34
2.2.9 Energi i bølger	37
2.2.10 Trykk i bølger (-)	41
2.2.11 Gyldighet av lineær bølgeteori (-)	41
3. ANDRE BØLGETEORIER (-)	41

1. GRUNNLAG

Vi skal beskrive bølger i vann. Vann betraktes i denne sammenhengen som en inkompressibel væske. Bølger beskrives normalt i to dimensjoner, lengde og dybde, i tillegg til tid. Vi kan utfra dette også beskrive bølger i tre dimensjoner, men uten endringer i bredden. Da har vi det som kalles *langkammet sjø*, dvs. at bølgetoppene forplanter seg parallelt, sett «ovenfra».

Her følger en kort repetisjon av viktige ligninger fra fluidmekanikken.

1.1 KONTINUITETSLIGNINGEN

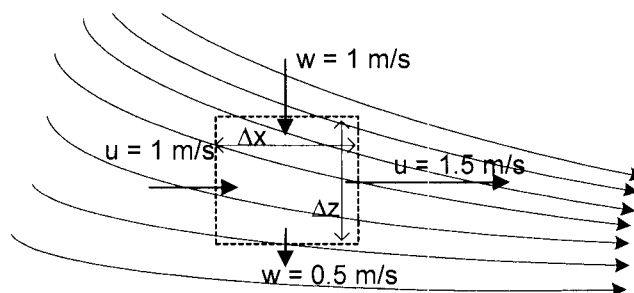


Fig. 1.1: Todimensjonal strømming gjennom et kontrollvolum

Figuren over viser et kontrollvolum (en tenkt avgrensning) med sider Δx og Δz i en to-dimensjonal væskestrøm. Det strømmer væske inn fra to sider med en hastighet på 1 m/s, slik at summen blir 2 m/s inn. Summen av hastighetene ut på de to andre sidene må da også være 2 m/s, forat væske ikke skal hope seg opp inne i volumet. Dersom strømhastigheten er mindre ut over Δx enn over Δz , må strømhastigheten øke tilsvarende ut over Δz . Dvs. at hastighetsendringene i hver av retningene må være like store, men med motsatt fortegn (den ene minker, den andre øker tilsvarende).

I figuren over ser vi at *endringen* av strømhastighetene i de to retningene er:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = -0.5 \quad \text{og:} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = 0.5$$

Vi har altså at:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta z} = 0$$

Går Δx og Δz mot null, har vi *kontinuitetsligningen* på formen:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

1.2 STRØMLINJER

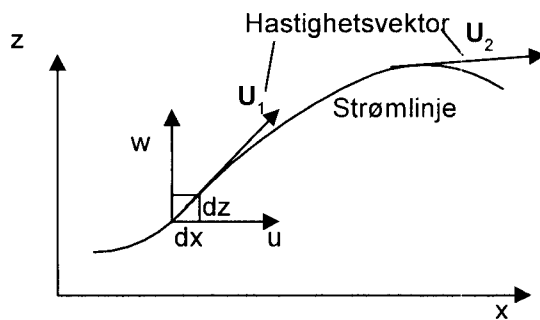


Fig. 1.2: Strømlinje og hastighetsvektorer

Dersom vi i ethvert punkt i en strømning kjenner retningene til strømhastigheten (hastighetsvektorenes retning), og drar linjer som går tangentielt til disse, vil vi få fram *strømlinjene*.

Dersom strømningen er stasjonær, dvs. at den ikke endrer seg med tiden, må naturligvis *partikkelbanene* følge strømlinjene. Alle endringer i strømningen kan beskrives ved å endre stedsvariabelen.

Ikkestasjonær strømning er både steds- og tidsavhengig. Ved et gitt tidspunkt kan vi finne hastighetsvektorene, og «tegne opp» strømlinjene i forhold til disse. Finner vi hastighetsvektorene i de samme punktene ved et tidspunkt like etter, og drar strømlinjene tangentielt til disse igjen, vil strømlinjene da ha endret seg (om ikke, er strømningen stasjonær). Siden nå hastighetsvektorene har endret seg annerledes enn forventet utfra strømlinjene ved det første tidspunktet, må partikkelbevegelsene dermed også ha en tidsvariasjon, som strømlinjene ikke kan beskrive. Der må være en global tidsvariasjon «overlagret» den lokale stedsvariasjonen.

Ligningene for strømlinjene er i utgangspunktet enkel. Skal hastighetsvektoren være tangentiell med strømlinjen (eller motsatt) må komponentene i vektoren svare til stigningstallet (dz/dx) til banen, dvs.:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{w}{u}$$

- som på mer vanlig form blir:

$$\boxed{\frac{dz}{w} = \frac{dx}{u}} \quad \text{eller} \quad \boxed{udz - wdx = 0}$$

Kontinuitetligningen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

1. Grunnlag

kan bare oppfylles av en funksjon, *strømfunksjonen*, som er slik at:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{og} \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Ved innsetting ser vi at dette stemmer:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = 0$$

Innsetter vi hastighetene gitt ved strømfunksjonen i ligningen for strømlinjene får vi:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0$$

Dvs. at den totale endringen av strømfunksjonen langs en strømlinje er null, eller: verdien av strømfunksjonen er konstant langs en strømlinje.

1.3 VIRVLINGSFRI STRØM

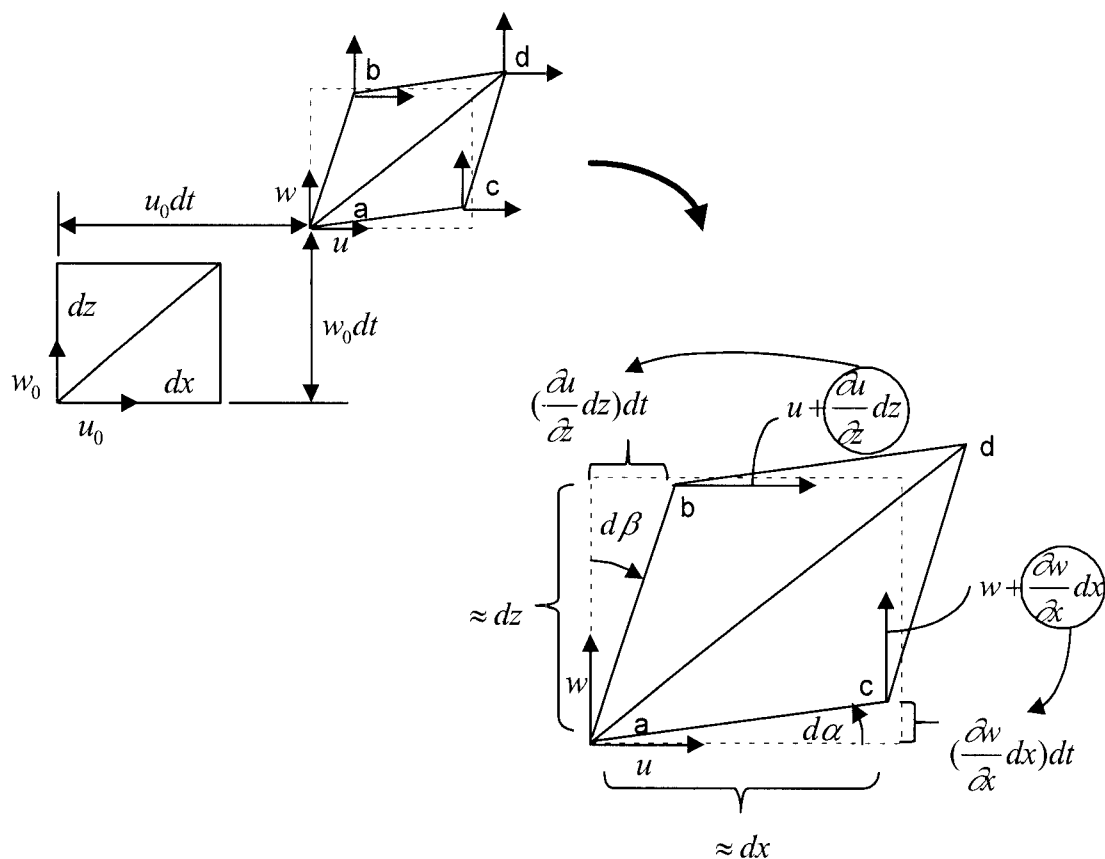


Fig. 1.3-1: Element i translasjon, og/eller rotasjon/formendring

Vi ser på forflytningen av et væskeelement med sider dx og dz i planet, som ved et gitt tidspunkt har hastighetskomponentene u_0 og w_0 . I løpet av dt har hastighetene endret seg til u og w (uttrykkene for disse er gitt i kap. 1.5). Uten formendring eller rotasjon vil forskyvningen av hvert hjørne bli, i løpet av dt :

$$\begin{aligned} \text{pkt. a, b, c, d:} \quad & \text{- horisontal forskyvning:} \quad dx_0 = u_0 dt \\ & \text{- vertikal forskyvning:} \quad dz_0 = w_0 dt \end{aligned}$$

Ved formendring eller rotasjon vil vi få en hastighetsendring langs elementets sider. Dette gir *tilleggs*forskyvninger av hjørnene b , c og d . I løpet av dt , vil vi få følgende tilleggsforskyvninger i pkt. b og c . De interessante verdiene er følgende:

$$\begin{aligned} \text{pkt. b:} \quad & \text{- horisontal tilleggsforskyvning:} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} dz\right) dt \\ \text{pkt. c:} \quad & \text{- vertikal tilleggsforskyvning:} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right) dt \end{aligned}$$

Dette gir vinkelendringer langs sidene som er, - i løpet av dt :

$$d\alpha = \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{dx} dx dt = \frac{\partial w}{\partial x} dt$$

$$d\beta = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{dz} dz dt = \frac{\partial u}{\partial z} dt$$

Dersom væskeelementet skal være fri for rotasjon (hvirvlingsfritt), må diagonalen ikke endre retning i løpet av dt . Dvs. at *betingelsen for hvirvlingsfri væske* er:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}}$$

Ser vi på stasjonær strømning omkring en halv-sylinder, og bruker bl.a. denne betingelsen for å utlede ligningene for strømfunksjonen (ψ), vil strømlinjene bli omtrent som vist i Fig. 1.3-2. Strømhastighetene vil minke med avstanden fra sylinderoverflaten. Et væskeelement i denne strømmen må deformeres i prinsippet som vist for ikke å rotere (vinkelen på diagonalene uendret). Denne type strømning kan observeres i virkelige væsker (viskøse væsker), men ikke i nærheten av legemet (i grenseskiktet) hvor virkningen av friksjon er stor (hvirveldannelser).

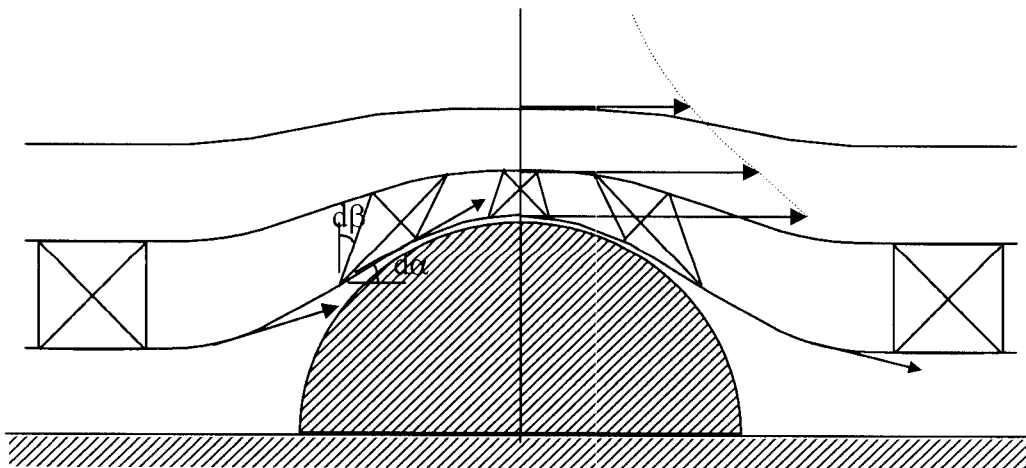


Fig. 1.3-2: Rotasjonsfri stasjonær stømning. Diagonalene i væskeelementet endrer ikke vinkel.

1.4 LAPLACE'S LIGNING & POTENSIALTEORI

Vi har nettopp sett at i en hvirvlingsfri væske er:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

Den funksjonen som kan oppfylle denne likheten må være slik at:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned}}$$

Dette ser vi ved å sette inn:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

I hvirvlingsfri væske kan altså begge hastighetskomponentene i prinsippet beregnes fra en og samme funksjon, kalt *hastighetspotensialet* (dels fordi det "gir" hastighetskomponentene, dels fordi det dreier seg om potensialteori, - se nedenfor).

Kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- må også være oppfylt for en hvirvlingsfri strømning. Innsettes uttrykkene for hastighetskomponentene over, får vi det som kalles *Laplace's ligning*:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0$$

$$\boxed{\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0} \quad (- \text{ hvor } \nabla \text{ er «del-» eller gradient operatoren})$$

Dette er en av de viktigste partielle differensialligningene i ingeniørmatematikken, og forekommer i en rekke sammenhenger, for eksempel ifm. gravitasjonsfelt, elektriske felt, strømning, etc. Enhver teori som er basert på løsning av denne ligningen kalles *potensialteori*. Formen på ϕ avhenger av hvilke andre betingelser (enn $\nabla^2 \phi = 0$) som gjelder.

Ifm. strømning brukes begrepet potensialteori også som et synonym for hvirvlingsfri, dvs. friksjonsfri, strøms. Laplace's ligning uttrykker *kontinuitetsligningen for hvirvlingsfri strømning*.

1.5 PARTIKKEL-AKSELERASJONER

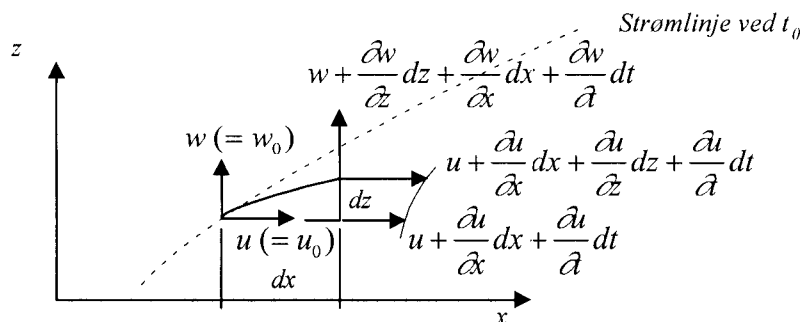


Fig .1.5: Rom- og tidsendring av hastighet til en væskepartikkel

En væskepartikkel som ved tidspunkt t_0 har hastighetskomponentene $u (=u_0)$ og $w (=w_0)$, vil etter dt ha fått en hastighetsendring. Dersom strømmingen er stasjonær vil partikkelen følge strømlinjen som partiklene dannet tangent til ved t_0 . Ellers vil partikkelen få en annen bane pga. en overlagret tidsavhengig hastighetsendring. Dette representerer en hastighetsendring som for u er $\frac{\partial u}{\partial t} dt$. I tillegg kan u får en endring både i horisontalplanet, $\frac{\partial u}{\partial x} dx$, og i vertikalplanet, $\frac{\partial u}{\partial z} dz$. Dermed blir den totale hastighetsendringen, *akselerasjonen*, over dt :

$$\frac{Du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial z} w$$

Helt tilsvarende vil vi få for w . Akselerasjonen i begge retninger blir da:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{Du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{Dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}}$$

Operatoren $\frac{D()}{dt}$ står for den *individuell deriverte*, som er en sum av den lokalt deriverte

$\frac{\partial ()}{\partial t}$, og den konvektivt deriverte $u \frac{\partial ()}{\partial x} + w \frac{\partial ()}{\partial z}$. Dette uttrykker at man i tillegg til

endringen av en egenskap lokalt i et punkt også må ta hensyn til at «individet» som betraktes (partikkelen) følger strømmingen til steder hvor egenskapene i strømmen ikke er de samme.

1.6 EULERS LIGNINGER

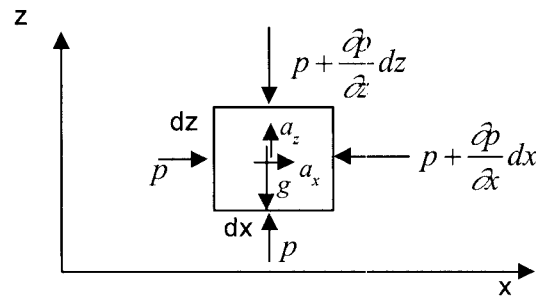


Fig.1.6: Vertikale og horisontale krefter på et væskeelement

De krefter som virker på et væskeelementet i en bølge (som vi forutsetter kan beskrives vha. potensialteori) er væsketrykk, gravitasjon, og treghetskrefter dersom elementet er i bevegelse.

1.6.1 Eulers dynamiske ligning

Vi ser først på vertikal kraftlikevekt. Har vi akselerasjon må kraftlikevekten tilfredsstille Newtons andre lov:

$$F_z = m \cdot a_z$$

Aksjonskreftene må nødvendigvis være de kreftene som virker uavhengig av akselerasjonen, dvs. trykk og gravitasjon:

$$F_z = p dxdy - (p + \frac{\partial p}{\partial z}) dxdy - \underbrace{\rho g dxdydz}_{dV} = (-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g dz) dxdy$$

Fortegnene må være som de er. Da vil en positiv trykkgradient (trykkendring) over positiv dz gi en negativ kraft, og en negativ gradient vil gi en positiv kraft.

Reaksjonskreftene (treghetskreftene) må være:

$$m \cdot a_z = (\rho dV) \frac{Dw}{dt} = \rho dxdydz \frac{Dw}{dt}$$

Da blir kraftlikevekten $F_z = m \cdot a_z$ slik:

$$\begin{aligned} (-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g dz) dxdy &= \rho dxdydz \frac{Dw}{dt} \\ \Rightarrow \rho dz \frac{Dw}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g dz \end{aligned}$$

- som gir det som kalles *Eulers dynamiske ligning* (men ikke på helt generell form):

$$\boxed{\frac{Dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}}$$

Tilsvarende vil vi få for horisontal likevekt. Siden vi her ikke har noe som tilsvarer gravitasjonen, blir kraftlikevekten horisontalt:

$$\boxed{\frac{Du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}$$

1.6.2 Eulers trykligning

Vi tar utgangspunkt i Eulers dynamiske ligning for vertikal kraftlikevekt:

$$\frac{Dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Vi setter inn uttrykket for den individuelt deriverte:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

For potensialstrøm gjelder:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Vi setter inn i uttrykket over:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Vi multipliserer på begge sider med ∂z , og får:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -g \partial z - \frac{1}{\rho} dp$$

- dvs:
$$d\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + u du + w dw = -g dz - \frac{1}{\rho} dp$$

Ved integrasjon har vi at:

$$\int d\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \frac{\partial\phi}{\partial t} + C_1 \quad ; \quad \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C_2 \quad ; \quad \int w dw = \frac{1}{2} w^2 + C_3$$

$$\int -g dz = -gz + C_4 \quad ; \quad \int -\frac{1}{\rho} dp = -\frac{1}{\rho} p + C_5$$

Gjennomfører vi integrasjonen på begge sider, kan vi skrive ligningen over, slik:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} w^2 + (C_1 + C_2 + C_3) = -gz - \frac{1}{\rho} p + (C_4 + C_5)$$

Løser vi dette mhp. totaltrykket p , får vi:

$$p = C - \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho u^2 - \frac{1}{2} \rho w^2 - \rho g z$$

- hvor alle konstanter er samlet i *en* konstant, C . Innsettes $U^2 = u^2 + w^2$, får vi:

$$p = C - \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho U^2 - \rho g z$$

Vi vil få det samme uttrykket om vi går ut fra Eulers dynamiske ligning for *horisontal* likevekt, bare at leddet gz vil mangle. Dette blir da bare et «spesialtilfelle» av ligningen over.

Trykket p er *det totale trykket i væsken* ($p = p_{tot}$). Det er viktig å være klar over. For en væske med fri overflate må nødvendigvis det totale trykket ved overflaten være lik overflatetrykket, $p = p_0$ (ellers får vi ikke trykk-likevekt). Dvs. at alle leddene på høyre side, unntatt C , må være lik null:

$$\left(-\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho U^2 - \rho g z\right)_{\text{overflate}} = 0$$

Det må bety at konstanten C må være lik overflatetrykket, f.eks. atmosfæretrykket, $C = p_0$. Da blir *Eulers trykkligning* for en væske med fri overflate slik:

$$p = p_0 - \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho U^2 - \rho g z$$

Dette er en ligning som nødvendigvis må gjelde for *vilkårlige punkter* i en *ikke-stasjonær potensialstrømning* (der er ikke forutsatt noe som skulle tilsi noe annet).

Ifm. bølger er det vanlig å sette atmosfæretrykket $p_0 = 0$. Da vil trykket i væsken være et *overtrykk* (+) (evt. *undertrykk* (-)) i forhold til dette referansetrykket, og ikke et absolutt trykk, dvs. i forhold til vakuum.

1. Grunnlag

Det er kanskje vanligere å se Eulers trykkligning på denne formen:

$$\boxed{p + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho U^2 + \rho g z = p_0} \quad (= C)$$

Uttrykt på denne formen, er det lett å se at uansett hvilket punkt vi velger i en gitt ikke-stasjonær potensialstrøm, vil summen av leddene på venstre side alltid måtte gi samme verdi (for ligningen sier at summen skal være konstant).

Ved stasjonær strømning er $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$. Ligningen faller da sammen med Bernoullis ligning, som uttrykker at energimengden som er tilknyttet en delmasse er konstant (evnen en delmasse har til å utføre arbeid (kraft x vei), fordelt på *trykkenergi*, *hastighetsenergi*, *høydeenergi*. Som kjent kan ikke energi forsvinne, bare gå over i andre former). Siden delmassene i en stasjonær strømning beveger seg langs strømlinjene, sier det seg selv at Bernoullis ligning (som et spesialtilfelle av Eulers trykkligning) også bare gjelder langs en strømlinje.

2. LINEÆR BØLGETEORI

Vi har sett at i en hvirvlingsfri væske vil partikkelhastigheter (dermed også partikkel-akselerasjoner) og trykk, kunne utledes fra en *potensialfunksjon*. De ikke bare kan, men *må* utledes av en slik funksjon, forat viktige forutsetninger skal være oppfylt.

2.1 POTENSIALFUNKSJONER

Som nevnt forekommer potensialteori i flere sammenhenger. Et eksempel på en "potensialfunksjon" har vi fra terrengekart. Kotene angir høydenivåer over havet. "Potensialfunksjonen" beskriver terrengets form vha. kotene ved gitte nivåer. Kotene er linjer hvor "potensialfunksjonen" er konstant, dvs. der er ingen høydeendring langs linjene. Den høydeendring terrenget gir på et gitt sted, når man beveger seg i en gitt retning, finnes fra endringen av potensialet (kotenenes verdi) i denne retningen, se Fig. 2.1.

På tilsvarende måte kan et *hastighetspotensiale* (om vi kan finne det) gi partikkelhastighetene i den retningen man søker.

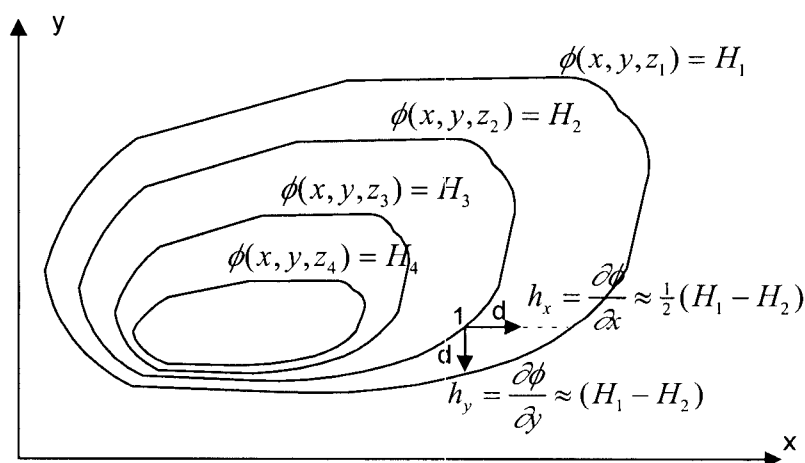


Fig. 2.1: Koter i terrenget. Ved å bevege seg en gitt lengde (d) i x-retning fra pkt.1, blir høydeendringen (h_x) bare ca. halvparten av høydeendringen i y-retning (h_y).

2.2 HASTIGHETSPOTENSIALET FOR BØLGER

2.2.1 Basis

Et hastighetspotensiale for bølger i hvirvlingsfri væske, må i utgangspunktet oppfylle følgende betingelser:

1. *Laplace's ligning* (= kontinuitetsligningen for hvirvlingsfri strøm):

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

2. *Kinematisk grenseflatebetingelse ved bunnen* (kinematikk: beskrivelse av bevegelse):

Der må ikke være strømning gjennom bunnen. Dette kan uttrykkes matematisk som at vertikalhastigheten mot bunnen skal være lik null, dvs:

$$w = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=-h} = 0$$

3.a. *Dynamisk grenseflatebetingelse ved overflaten*: Dette refererer til at de kreftene som driver bevegelsene av partiklene må være i likevekt. Altså må *Eulers trykkligning* være oppfylt ved overflaten. For et punkt på overflaten må da det totale trykket være lik atmosfæretrykket, som vi kan sette lik $p_0 = 0$:

$$p = 0 - \left[\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho U^2 + \rho g z \right]_{z=\zeta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho U^2 + \rho g z \right]_{z=\zeta} = 0$$

3.b. *Kinematisk grenseflatebetingelse ved overflaten*: Vertikalbevegelsene av partiklene ved overflaten må følge overflatens vertikalbevegelse. Dette kan uttrykkes matematisk slik:

$$w = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{z=\zeta}$$

Disse betingelsene er oppsummert i Fig.2.2-1 under.

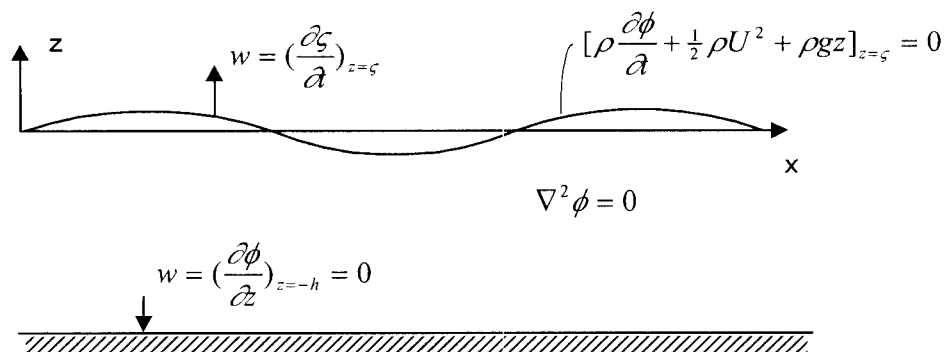


Fig. 2.2-1: Betingelser som må oppfylles i en bølge (1 - 3.a,b over)

2.2.2 Lineariseringer

Eulers trykklikning (betingelse 3) inneholder et andreordens ledd. Dette kompliserer teorien, dersom dette ikke kan enten lineariseres, eller neglisjeres. Dersom vi *forutsetter lave bølger*, viser det seg at hastighetsleddet blir lite, og kan neglisjeres:

$$\frac{1}{2} \rho U^2 = \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) \approx 0$$

Da blir betingelse 3:

$$\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} + \rho g \zeta = 0$$

Å beregne $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ på den frie overflaten, er ikke lett, når uttrykket for overflatehevningen ennå er ukjent. Siden vi nå allerede har forutsatt lave bølger, gjør vi liten feil om vi beregner $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ for $z = 0$ istedenfor. Da kan vi skrive den lineariserte dynamiske grenseflatebetingelsen ved overflaten (3.a), slik:

$$\boxed{\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} + g \zeta = 0} \quad (3.a)$$

Vi har samme problemstillingen ifm. betingelse 3.b. Ved lave bølger blir vertikal partikkelhastighet ved $z = 0$, praktisk talt den samme som på bølgens overflate, dvs. vi kan skrive:

$$w = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{z=0} \quad \Rightarrow \quad w - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{z=0} = 0$$

Siden $w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$, får vi den lineariserte kinematiske grenseflatebetingelsen ved overflaten (3.b) slik:

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial z} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{z=0} = 0} \quad (3.b)$$

Disse to lineariserte betingelsene kan kombineres til *en*. Fra betingelse 3.a ovenfor, ser vi at:

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=0}$$

Innsettes dette i betingelse 3.b, får vi:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2} \right)_{z=0} = 0$$

- eller på mer vanlig form:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2} \right)_{z=0} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0} \quad (3)$$

Dermed samles de to grenseflatebetingelsene ved overflaten til det vi kan kalle *den lineariserte fri grenseflatebetingelsen*.

Vi ser at den bølgeteorien vi er i ferd med å beskrive, lineær bølgeteori, har flere forutsetninger knyttet til at bølgene må være lave. Dette er viktig å være klar over, slik at ikke teorien tøyes for langt. Det er ikke uten grunn at bølgeteorien også kalles *lav-amplitude bølgeteori*.

2.2.3 Utledning av hastighetspotensialet

Etter lineariseringen, oppsummerer vi nå at hastighetspotensialet må tilfredsstillte følgende ligninger:

1. Laplace's ligning:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\nabla^2 \phi = 0)$$

2. Kinematisk grenseflatebetingelse ved bunnen:

$$w = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=-h} = 0$$

3. Linearisert fri grenseflatebetingelse:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad \text{- fra} \quad \begin{array}{l} \text{3.a: } \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} + g \zeta = 0 \\ \text{3.b: } \frac{\partial \phi}{\partial z} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{z=0} = 0 \end{array}$$

Dette er differensialligninger hvor både ligning 1 og 3 inneholder to partielt deriverte. Disse kan i prinsippet løses analogt med *svingeligningen for en bjelke*, det vil si vha. *metoden for separasjon av variable*.

Her ser vi at totalt tre variabler inngår, slik at $\phi = \phi(x, z, t)$ må tilfredsstille alle ligningene over. Etter metoden for separasjon av variable, må da ϕ uttrykkes vha. 3 separate funksjoner, slik:

$$\phi(x, z, t) = F(x) \cdot G(z) \cdot A(t)$$

2.2.3.1 Anvendelse av Laplace's ligning (1)

Vi setter dette inn i Laplace's ligning, og bruker litt enklere derivasjonssymboler:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$A(t)G(z)F''(x) + A(t)F(x)G''(z) = 0$$

$$\Rightarrow G(z)F''(x) + F(x)G''(z) = 0$$

$$G(z)F''(x) = -F(x)G''(z)$$

$$\therefore -\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(z)}{G(z)} = k^2$$

Dersom v.s. av ligningen skal være lik h.s., uansett verdi på x og z , må begge sidene av ligningen være lik en og samme konstant, som vi kaller k^2 , av hensiktsmessighet.

Dermed får vi to separate differensialligninger:

$$-\frac{F''(x)}{F(x)} = k^2 \quad \Rightarrow \quad F''(x) + k^2 F(x) = 0$$

$$\frac{G''(z)}{G(z)} = k^2 \quad \Rightarrow \quad G''(z) - k^2 G(z) = 0$$

Dette er «greie» differensialligninger med kjente løsninger. De lineært uavhengige løsningene blir på formen:

$$F(x) = e^{rx}$$

$$G(z) = e^{qz}$$

Ved innsetting i ligningene over får vi følgende røtter i de karakteristiske ligningene:

$$\begin{array}{l|l} r^2 e^{rx} + k^2 e^{rx} = 0 & q^2 e^{qz} - k^2 e^{qz} = 0 \\ \therefore r^2 + k^2 = 0 & \therefore q^2 - k^2 = 0 \\ \Rightarrow \underline{r_{1,2} = \pm \sqrt{-k^2} = \pm ik} & \Rightarrow \underline{q_{1,2} = \pm \sqrt{k^2} = \pm k} \end{array}$$

Dermed blir de generelle løsningene:

$$F(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}$$

$$G(z) = d_1 e^{kz} + d_2 e^{-kz}$$

Siden:

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

$$e^{-ikx} = \cos kx - i \sin kx$$

- blir:

$$\begin{aligned} F(x) &= c_1 (\cos kx + i \sin kx) + c_2 (\cos kx - i \sin kx) \\ &= (c_1 + c_2) \cos kx + i(c_1 - c_2) \sin kx \end{aligned}$$

Setter vi $f_1 = c_1 + c_2$ og $f_2 = i(c_1 - c_2)$, får vi:

$$F(x) = f_1 \cos kx + f_2 \sin kx$$

Da har vi hastighetspotensialet på formen:

$$\phi = A(t)(g_1 e^{kz} + g_2 e^{-kz}) \underbrace{(f_1 \cos kx + f_2 \sin kx)}_{F(x)}$$

2.2.3.2 Anvendelse av kinematisk grenseflatebetingelse ved bunnen (2)

Vi innsetter dette hastighetspotensialet i kinematisk grenseflatebetingelse:

$$w = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=-h} = 0$$

$$\Rightarrow A(t)(kg_1 e^{kh} - kg_2 e^{-kh})F(x) = 0$$

Innsettes $z = -h$, får vi:

$$A(t)(kg_1 e^{-kh} - kg_2 e^{kh})F(x) = 0$$

Siden vi ikke generelt kan anta at $A(t) = 0$, eller $F(x) = 0$, må:

$$\begin{aligned} g_1 e^{-kh} - g_2 e^{kh} &= 0 \\ g_1 e^{-kh} &= g_2 e^{kh} \\ g_1 &= g_2 \frac{e^{kh}}{e^{-kh}} = g_2 e^{2kh} \end{aligned}$$

Da blir hastighetspotensialet:

$$\phi = A(t)g_2 (e^{2kh} e^{kz} + e^{-kz})F(x)$$

Her er:

$$e^{2kh} e^{kz} + e^{-kz} = e^{kh} (e^{kh} e^{kz} + e^{-kz} e^{-kh}) = e^{kh} \frac{2(e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)})}{2} = 2e^{kh} \cosh k(z+h)$$

Da kan hastighetspotensialet skrives slik:

$$\boxed{\phi = A(t)G_1 \cosh k(z+h)(f_1 \cos kx + f_2 \sin kx)} \quad - \text{ hvor } G_1 = g_1 2e^{kh} = \text{konst}$$

2.2.3.3 Anvendelse av linearisert fri grenseflatebetingelse (3)

Vi setter inn hastighetspotensialet i linearisert fri grenseflatebetingelse:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0$$

$$\ddot{A}(t)G_1 \cosh k(z+h)F(x) + gA(t)G_1 k \sinh k(z+h)F(x) = 0$$

Vi innsetter $z = 0$, og trekker G_1 og $F(x)$ utenfor:

$$\begin{aligned} \ddot{A}(t) \cosh kh + gA(t)k \sinh kh &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{A}(t) + gk \tanh kh A(t) &= 0 \end{aligned}$$

Vi erstatter konstanten $gk \tanh kh$ med ω^2 , og får en differensialligning som i prinsippet er lik den vi opprinnelig hadde for $F(x)$.

$$\ddot{A}(t) + \omega^2 A(t) = 0$$

Dvs. at karakteristisk ligning blir:

$$p^2 + \omega^2 = 0$$

og røttene blir:

$$p_{1,2} = \pm i\omega = \pm \sqrt{gk \tanh kh}$$

Tilsvarende $F(x)$, får vi for $A(t)$:

$$A(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t$$

Hastighetspotensialet blir da:

$$\phi = G_1 \cosh k(z+h)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t)(f_1 \cos kx + f_2 \sin kx)$$

Vi multipliserer G_1 inn i konstantene a_1, a_2, f_1, f_2 , og får:

$$\phi = \cosh k(z+h)(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t)(F_1 \cos kx + F_2 \sin kx)$$

Dette er *den generelle løsningen* av differensialligningen for hastighetspotensialet. Nå gjenstår å bestemme konstantene i ligningen slik at vi kan finne *den partikulære løsningen*.

2.2.3.4 Partikulærløsninger for hastighetspotensialet

Den endelige formen på hastighetspotensialet fremkommer når konstantene bestemmes. Uansett hvilke konstanter som velges, vil de gi en mulig partikulærløsning av problemet, dvs. de vil tilfredsstille de 3 ligningene vi gikk utfra. Slik må det nødvendigvis være, og det kan verifiseres ved å sette inn i ligningene de konstantene som velges.

Det er selvsagt ikke alle valg av konstanter som representere er «nyttig» løsning. Velger vi f.eks. $A_1 = A_2 = F_1 = F_2 = 0$ blir $\phi = 0$. Dette er en løsning som åpenbart tilfredsstiller betingelsene våre, siden:

$$1) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 ; \quad 2) \quad w = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=-h} = 0 \quad 3) \quad \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0$$

Men løsningen er uinteressant. Om vi derimot velger $A_2 = F_2 = 0$, og setter $A_1 F_1 = K$, får vi:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \cosh k(z+h) A_1 \cos \omega t \cdot F_1 \cos kx \\ &= K \cosh k(z+h) \cos \omega t \cos kx \end{aligned}$$

Velger vi $A_1 = F_1 = 0$, og setter $A_2 F_2 = -K$, får vi:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \cosh k(z+h) A_2 \sin \omega t \cdot F_2 \sin kx \\ &= -K \cosh k(z+h) \sin \omega t \sin kx \end{aligned}$$

Velger vi $A_1 = F_1 = 0$, og setter $A_2 F_2 = K$, får vi:

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \cosh k(z+h) A_2 \sin \omega t \cdot F_2 \sin kx \\ &= K \cosh k(z+h) \sin \omega t \sin kx \end{aligned}$$

Vi kunne fortsette å velge andre konstanter, men la oss se nærmere på det vi allerede har. Vi har valgt tre *ulike sett* av konstanter, og dermed funnet tre partikulærløsninger som tilfredsstiller startbetingelsene (dette er ikke åpenbart; den som tviler kan sette inn og se). Partikulærløsninger kan summeres dersom de er lineært uavhengige, dvs. at hver av løsningene ikke kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av de andre. Vi ser at $\phi_2 \neq C_1 \phi_1$, og $\phi_3 \neq C_2 \phi_1$ (C er en eller annen konstant). Dermed får vi to løsninger til, ved å summere slik:

$$\begin{aligned} \phi_4 &= \phi_1 + \phi_2 = K \cosh k(z+h)(\cos \omega t \cos kx - \sin \omega t \sin kx) \\ \phi_5 &= \phi_1 + \phi_3 = K \cosh k(z+h)(\cos \omega t \cos kx + \sin \omega t \sin kx) \end{aligned}$$

Bruker vi den kjente sammenhengen :

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

- ser vi at :

$$\phi_4 = K \cosh k(z+h) \cos(\omega t - kx)$$

$$\phi_5 = K \cosh k(z+h) \cos(\omega t + kx)$$

Nå gjenstår bare bestemmelsen av *en* konstant K.

Partikulærløsningen ϕ_4

Vi ser først på den fjerde partikulærløsningen, og vil bestemme K. Vi har inntil nå gjort bruk av betingelsene 1, 2, 3, men ikke 3.a og 3.b, spesielt. Vi ser at betingelse 3.b knytter hastighetspotensialet til bølgeprofilen:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} + g\zeta = 0$$

Da blir:

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} \\ &= -\frac{1}{g} (-\omega K \cosh k(z+h) \sin(\omega t - kx))_{z=0} \\ &= \underbrace{\frac{K\omega}{g} \cosh kh \sin(\omega t - kx)}_{\zeta_a} \end{aligned}$$

Bølgens amplitude må nødvendigvis være:

$$\zeta_a = \frac{K\omega}{g} \cosh kh$$

- som gir at konstanten K i hastighetspotensialet må bli:

$$K = \frac{\zeta_a g}{\omega \cosh kh}$$

Dermed har vi en endelig partikulærløsning for hastighetspotensialet:

$$\phi_4 = \frac{\zeta_a g}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - kx)$$

- som altså gir en overflateform som blir:

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} = \zeta_a \sin(\omega t - kx)$$

2.2.3.5 Det endelige hastighetspotensialet

Alle de 5 utledede hastighetspotensialene tilfredstiller forutsetningene. Vi skal ikke bevise det her, men bare si slik det faktisk er, at:

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 representerer hastighetspotensialer til stående bølger (som vi vil få når en bølge reflekteres mot en vegg). ϕ_2 er 90° faseforskjøvet i forhold til ϕ_1 og ϕ_3 .

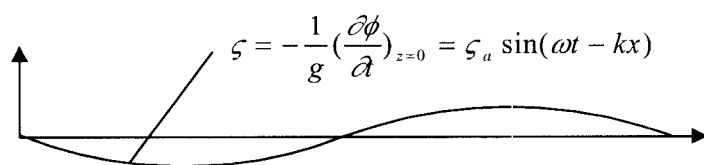
ϕ_4, ϕ_5 representerer progressive bølger, dvs. bølger som forflytter seg, ϕ_4 gir en bølge som forflytter seg langs positiv x-akse, mens ϕ_5 i negativ retning.

Vi er primært interessert i å beskrive progressive (propagerende) bølger. Dermed blir det endelige hastighetspotensialet for en progressiv bølge i positiv retning (ϕ_4):

$$\phi = \frac{\zeta_a g}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - kx) \quad ; h \text{ er vanddyb; } k \text{ og } \omega - \text{ se nedenfor}$$

Dette gir, som allerede vist, en overflatebølge på formen:

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} = \zeta_a \sin(\omega t - kx)$$



$$\phi = \frac{\zeta_a g}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - kx)$$

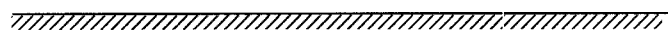


Fig. 2.2-2: Hastighetspotensialet for sinusformede propagerende overflatebølger

Konstantene ω og k

Vi ser på en bølge med lengde L . Den bruker bølgeperioden, T , på å forflytte seg denne lengden. Dersom vi setter $t = 0$, kan vi beskrive bølgens form ved dette tidspunktet, ved å sette inn ulike x -verdier i bølgeformelen, som da blir på formen $\zeta = \zeta_a \sin(-kx)$. Vi må ha:

$$\text{For } x = \frac{L}{4}, \text{ må } \zeta = -\zeta_a \Rightarrow \sin\left(-k \frac{L}{4}\right) = -1 \Rightarrow k \frac{L}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{L}} \text{ [rad/m]}$$

Denne konstanten kalles bølgetallet.

Tilsvarende kan vi sette $x = 0$, og beskrive overflatehevingen her ved ulike tidspunkt, som $\zeta = \zeta_a \sin(\omega t)$. Etter $T/4$ periode må da overflaten ha maks. høyde ved $x = 0$ (bølgen propagerer mot høyre). Dvs.:

$$\text{For } t = \frac{T}{4}, \text{ må } \zeta = \zeta_a \Rightarrow \sin\left(\omega \frac{T}{4}\right) = 1 \Rightarrow \omega \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \text{ [rad/s]}$$

Denne konstanten kalles (bølge)sirkelfrekvensen (dette er altså ikke «vanlig frekvens» $1/T$; det angir forholdet mellom antall radianer i en sirkel (2π) og bølgeperioden; det er unødvendig å forsøke å «forstå» dette noe videre).

Under kapittel 2.2.3.3 erstattet vi $gk \tanh kh$ med ω^2 , dvs. at sirkelfrekvensen har en avhengighet til bølgetall og vandyp, som er:

$$\boxed{\omega = \sqrt{gk \tanh kh}} \quad (\omega^2 = gk \tanh kh)$$

Dette kalles *frekvensrelasjonen* eller dispersjonsrelasjonen på generell form. En bølge med gitt periode T har dermed en gitt sirkelfrekvens ω . Bølgetallet k , finnes fra denne relasjonen (eller vi kan gå motsatt vei, fra gitt L , via k til ω og T). Siden k generelt ikke kan løses direkte ut fra dette uttrykket, finnes det ved iterasjon. Det er vanlig å begynne iterasjonen utfra sammenhengen $\omega^2 = gk$ slik at k blir $k = \frac{\omega^2}{g}$. Dette er i virkeligheten et spesialtilfelle av frekvensrelasjonen, som gjelder for dypt vann, som vi skal se (da gis k direkte, uten iterasjon).

Uansett vandyp er der er en entydig sammenheng mellom ω og k , som også gir en entydig sammenheng mellom bølgelengde (L) og periode (T). Det er bare bølgeamplityden, ζ_a , som ikke gis ved noen relasjon. Bølgeamplityden bør være lav i forhold til bølgelengden for å tilfredsstille forutsetningene i teorien. Teorien tøyes ofte ganske langt. Den øvre fysiske begrensning inntreffer idet bølger bryter. Det skjer ved en *bølgebratthet* på ca. $H/L = 1/7$, (dypt vann) hvor H er total bølgehøyde, $2\zeta_a$.

2.2.4 Hastighetspotensialet for dypt vann

Det hastighetspotensialet vi nå har funnet er generelt, og gjelder uansett vanndyp. Det viser seg imidlertid at det kan uttrykkes på enklere form når vanndypet blir stort.

Havdyp deles i prinsippet i tre utfra størrelsen på kh :

• Grunt vann: $kh \ll 1 \Rightarrow h \ll \frac{L}{2\pi}$; I praksis defineres grunt vann ved $\boxed{h \leq \frac{L}{20}}$

• Dypt vann: $kh \gg 1 \Rightarrow h \gg \frac{L}{2\pi}$; I praksis defineres dypt vann ved $\boxed{h \geq \frac{L}{2}}$

• Endelig vanndyp: Dette er mellom dypt og grunt, dvs. for $\boxed{\frac{L}{20} < h < \frac{L}{2}}$

Vi har at:

$$\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} = \frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{e^{kh} + e^{-kh}} = \frac{e^{kz} e^{kh} + e^{-kz} e^{-kh}}{e^{kh} + e^{-kh}}$$

Vi multipliserer med e^{-kh} over og under brøkstrekken:

$$\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} = \frac{e^{-kh} [e^{kz} e^{kh} + e^{-kz} e^{-kh}]}{e^{-kh} [e^{kh} + e^{-kh}]} = \frac{e^{kz} + e^{-kz} e^{-2kh}}{1 - e^{-2kh}}$$

For dypt vann blir da minst $kh = \frac{2\pi}{L} \frac{L}{2} = \pi$. For alle vanndyp større en grenseverdien blir da:

$$e^{-2kh} < e^{-2\pi} = 0.001867 \approx 0$$

Dermed får vi for dypt vann:

$$\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \approx e^{kz}$$

Hastighetspotensialet for dypt vann blir da:

$$\boxed{\phi = \frac{\zeta_a g}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx)} \quad \text{for } h \geq \frac{L}{2}$$

Vi ser at bølgeprofilen ikke endres, siden vi igjen får:

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = \zeta_a \sin(\omega t - kx)$$

Hastighetspotensialet for grunt vann blir som for endelig vanndyp.

2.2.5 Bølgehastigheter og frekvensrelasjoner

En bølge med lengde L og periode T , vil forflytte seg med en hastighet (fasehastighet) som ganske enkelt er:

$$c = \frac{L}{T} \quad [\text{m/s}] \quad (c \text{ fra eng. } celerity)$$

Siden $k = \frac{2\pi}{L}$ og $\omega = \frac{2\pi}{T}$, kan dette også skrives:

$$c = \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{k}$$

Frekvensrelasjonen på generell form har vi fra før:

$$\omega = \sqrt{kg \tanh kh}$$

Setter vi dette inn i $c = \frac{\omega}{k}$, får vi fasehastigheten på generell form:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh}$$

Dette gjelder uansett havdyp, men på dypt og grunt vann får vi to «spesialtilfeller»:

- Grunt vann: $kh \leq \frac{2\pi}{L} \frac{L}{20} = \frac{\pi}{10} \Rightarrow \tanh kh \approx kh$ ($kh = 0.314$ gir $\tanh kh = 0.304$)

Da blir frekvensrelasjonen $\omega = k\sqrt{gh}$, og fasehastigheten $c = \sqrt{gh}$

- Dypt vann: $kh \geq \frac{2\pi}{L} \frac{L}{2} = \pi \Rightarrow \tanh kh \approx 1$ ($kh = \pi$ gir $\tanh kh = 0.996$)

Da blir frekvensrelasjonen $\omega = \sqrt{kg}$, og fasehastigheten $c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$

På dypt vann er bølgenes hastighet avhengig bare av bølgelengde, *ikke havdyp* (naturligvis). På endelig havdyp er hastigheten avhengig av *begge deler*. Minkende havdyp «bremser» bølgen. På grunt vann er hastigheten avhengig bare av dypet, *ikke bølgelengden* (motsatt av dypt vann). Alle bølger har da samme hastighet ved samme dyp. At lange bølger på dypt og endelig vandyp løper fortere enn korte, kalles *dispersjon*.

At bølger bryter på grunt vann, har med friksjon å gjøre. Vannet ved bunnen stoppes mer opp enn vannet ved overflaten, som «skyter» fremover. Siden lineær bølgeteori er basert på potensialteori ($\Rightarrow$ friksjonsfri væske), vil den ikke gi noen indikasjon på at bølger bryter på grunt vann, slik som man observerer i virkeligheten. Pga. friksjonens åpenbart betydelige virkning på grunt vann, er lineær bølgeteori av tvilsom verdi her.

L. kanskje en andre effekt blir viktigere?

2.2.6 Partikkelbevegelser

2.2.6.1 Partikkelhastigheter

Vi så under kap.1.1.4 at for en hvirvlingsfri (friksjonsfri) væske må hastighetskomponentene utledes av den samme funksjonen, nemlig hastighetspotensialet - som vi nå har funnet. Vi så at hastighetskomponentene må være:

$$\begin{aligned} - \text{horisontalhastighet: } u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ - \text{vertikalhastighet: } w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned}$$

Da blir generelt:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{g \zeta_a}{\omega} k \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(\omega t - kx) & \left(\frac{d \cos \alpha}{dx} = \frac{d \cos \alpha}{d \alpha} \frac{d \alpha}{dx} = -\sin \alpha \frac{d \alpha}{dx} \right) \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{g \zeta_a}{\omega} k \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - kx) & \left(\frac{d \cosh \alpha}{dx} = \sinh \alpha \frac{d \alpha}{dx} \right) \end{aligned}$$

Innsettes fra frekvensrelasjonen at $k = \frac{\omega^2}{g \tanh kh} = \frac{\omega^2}{g \frac{\sinh kh}{\cosh kh}}$, får vi generelt:

$$\boxed{u = \zeta_a \omega \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx)} \quad \boxed{w = \zeta_a \omega \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - kx)}$$

For dypt vann får vi tilsvarende:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\zeta_a g}{\omega} k e^{kz} \sin(\omega t - kx) \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\zeta_a g}{\omega} k e^{kz} \cos(\omega t - kx) & \left(\frac{d e^{kz}}{dz} = e^{kz} \frac{dkz}{dz} \right) \end{aligned}$$

Innsettes frekvensrelasjonen for dypt vann $k = \frac{\omega^2}{g}$, får vi:

$$\boxed{u = \zeta_a \omega e^{kz} \sin(\omega t - kx)} \quad \boxed{w = \zeta_a \omega e^{kz} \cos(\omega t - kx)} \quad - \text{ se Fig. 2.2-3}$$

Som allerede nevnt er lineær bølgeteori lite egnet på grunt vann, pga.friksjonens betydning. Presentasjon av uttrykkene for hastighetskomponentene er uinteressant (bruk evt. de generelle uttrykkene over).

2.2.6.2 Partikkelakselerasjoner

Disse finnes nå enkelt som:

- horisontalakselerasjon: $a_x = \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$
- vertikalakselerasjon: $a_z = \dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$

For et *generelt havdyp* får vi da:

$$a_x = \dot{u} = \zeta_a \omega^2 \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - kx)$$

$$a_z = \dot{w} = -\zeta_a \omega^2 \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx)$$

For *dypt vann* får vi:

$$a_x = \dot{u} = \zeta_a \omega^2 e^{kz} \cos(\omega t - kx)$$

$$a_z = \dot{w} = -\zeta_a \omega^2 e^{kz} \sin(\omega t - kx)$$

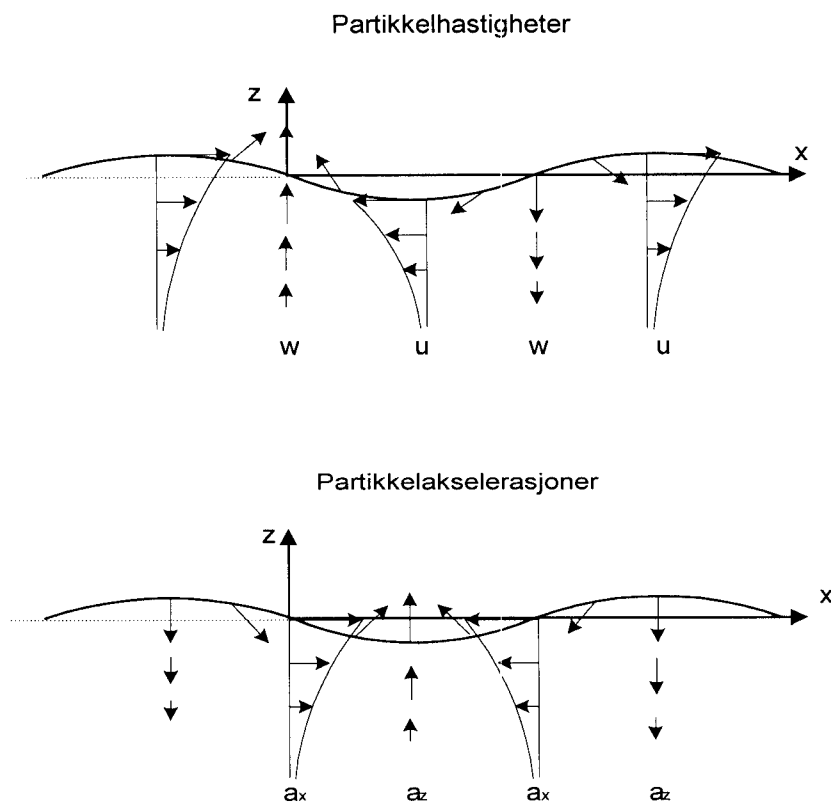


Fig. 2.2-3: Partikkelhastigheter og akselerasjoner i bølge på dypt vann.
Se også Fig.2.2-9

2.2.6.3 Partikkelbaner

Dypt vann

Vi har nå funnet uttrykkene for hastighetene til partiklene (delmassene) i en bølge. Partiklene må bevege seg på en eller annen måte i baner. For ikkestasjonær strømming (som i bølger) vil partikkelbanene være forskjellige fra strømlinjene. Vi skal se på partikkelbanene først, og komme tilbake til strømlinjene senere.

Siden hastighet generelt er $u = \frac{dx}{dt}$ og dermed $dx = udt$, kan vi finne forflytningen til en delmasse etter en tid, som:

$$\Delta x = \int_0^t u dt$$

Vi ser på en partikkel med utgangsposisjon x_0 . Innsettes uttrykket for horisontal partikkelhastighet på dypt vann, finner vi endringen i horisontalposisjonen som:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \int_0^t \zeta_a \omega e^{kz} \sin(\omega t - kx_0) dt \\ &= \zeta_a \omega e^{kz} \int_0^t \sin(\omega t - kx_0) dt \\ &= \zeta_a \omega e^{kz} \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t - kx_0) \right]_0^t \\ &= \zeta_a e^{kz} [-\cos(\omega t - kx_0) - (-)\cos(-kx_0)] \\ &= \zeta_a e^{kz} [\cos(-kx_0) - \cos(\omega t - kx_0)]\end{aligned}$$

Dersom vi setter $x_0 = 0$, blir:

$$\Delta x = \zeta_a e^{kz} [\cos(0) - \cos(\omega t)] = \zeta_a e^{kz} [1 - \cos(\omega t)]$$

Vi får altså (generelt) en forskyvning som oscillerer omkring en fast gjennomsnittsverdi.

Vi ser at Δx ikke bare er avhengig av tid, men også av partikkelens z - posisjon, via leddet e^{kz} . Dersom vi antar at endringen av z - posisjonen er moderat, blir endringen av e^{kz} liten (dette forutsetter lange, lave bølger). Vi setter derfor z lik utgangsverdien, $z = z_0$, slik at:

$$\Delta x = \zeta_a e^{kz_0} [1 - \cos(\omega t)]$$

Endring i vertikalposisjonen, når utgangsposisjonen er z_0 , blir:

$$\begin{aligned}\Delta z &= \int_0^t w dt \\ &= \zeta_a \omega e^{kz_0} \int_0^t \cos(\omega t - kx_0) dt \\ &= \zeta_a \omega e^{kz_0} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t - kx_0) \right]_0^t \\ &= \zeta_a e^{kz_0} [\sin(\omega t - kx_0) - \sin(-kx_0)]\end{aligned}$$

Med $x_0 = 0$, blir:

$$\Delta z = \zeta_a e^{kz_0} [\sin(\omega t) - \sin(0)] = \zeta_a e^{kz_0} \sin(\omega t)$$

Vi ser at z-posisjonen blir en ren oscillasjon om utgangspunktet.

Utfra ligningene for Δx og Δz kan det vises at partiklene beveger seg i sirkler. Vi kan vise dette på en praktisk måte, ved å beregne Δx og Δz for forskjellige tidspunkt i løpet av en bølgeperiode.

Anta at bølgeamplityden er $\zeta_a = 1$ m, og partikkelens utgangsposisjon er $x_0 = 0$, $z_0 = 0$. Da blir:

$$\Delta x = \zeta_a e^{kz_0} [1 - \cos(\omega t)] = 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$\Delta z = \zeta_a e^{kz_0} \sin(\omega t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$t_0 = 0:$	$\Delta x_0 = 1 - \cos(0) = 1 - 1 = 0$	$\Delta z_0 = \sin(0) = 0$
$t_1 = \frac{T}{4}:$	$\Delta x_1 = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$	$\Delta z_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$t_2 = \frac{T}{2}:$	$\Delta x_2 = 1 - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2$	$\Delta z_2 = \sin(\pi) = 0$
$t_3 = \frac{3T}{4}:$	$\Delta x_3 = 1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$	$\Delta z_3 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
$t_4 = T:$	$\Delta x_4 = 1 - \cos(2\pi) = 1 - 1 = 0$	$\Delta z_4 = \sin(0) = 0$

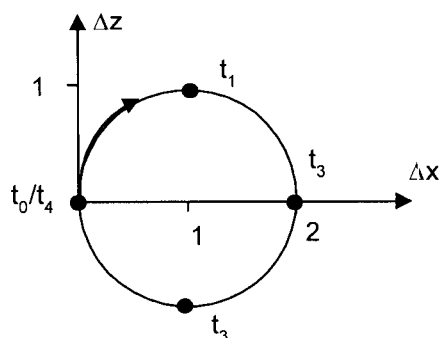


Fig. 2.2-4: Partiklene går i sirkulære baner (dypt vann).
Se også Fig.2.2-6/10

Vi ser at de beregnede forskyvningene danner en lukket sirkel, som vist i Fig. 2.2-4. Uansett startverdier vil vi alltid få en sirkel (forutsatt lange, lave bølger). Men som det fremgår både av uttrykkene for hastigheter, akselerasjoner, og partiklenes baner, reduseres bevegelsene nedover i dypet med faktoren e^{kz} (kalles Smith-effekten). Ved overflaten blir:

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{kz} = e^0 = 1$$

- mens ved et dyp lik halve bølgelengden, får vi:

$$z = -L/2 \quad \Rightarrow \quad e^{kz} = e^{\frac{2\pi}{L}(-\frac{L}{2})} = e^{-\pi} = 0.043$$

Ved et dyp som er lik halve bølgelengden, blir bevegelsene bare 4.3 % av bevegelsene ved overflaten. Partikkelbevegelser ved større dyp enn $z = -L/2$ neglisjeres derfor.

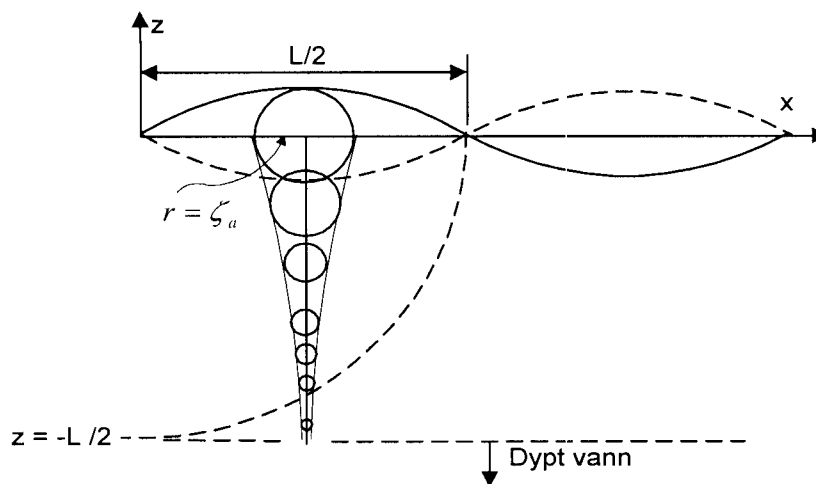


Fig. 2.2-5: Dybdens innvirkning på partikkelbanene på dypt vann

Dersom vi relaterer partikkelbevegelsene til bølgeposisjonen, kan vi illustrere sammenhengen som i Fig.2.2-6.

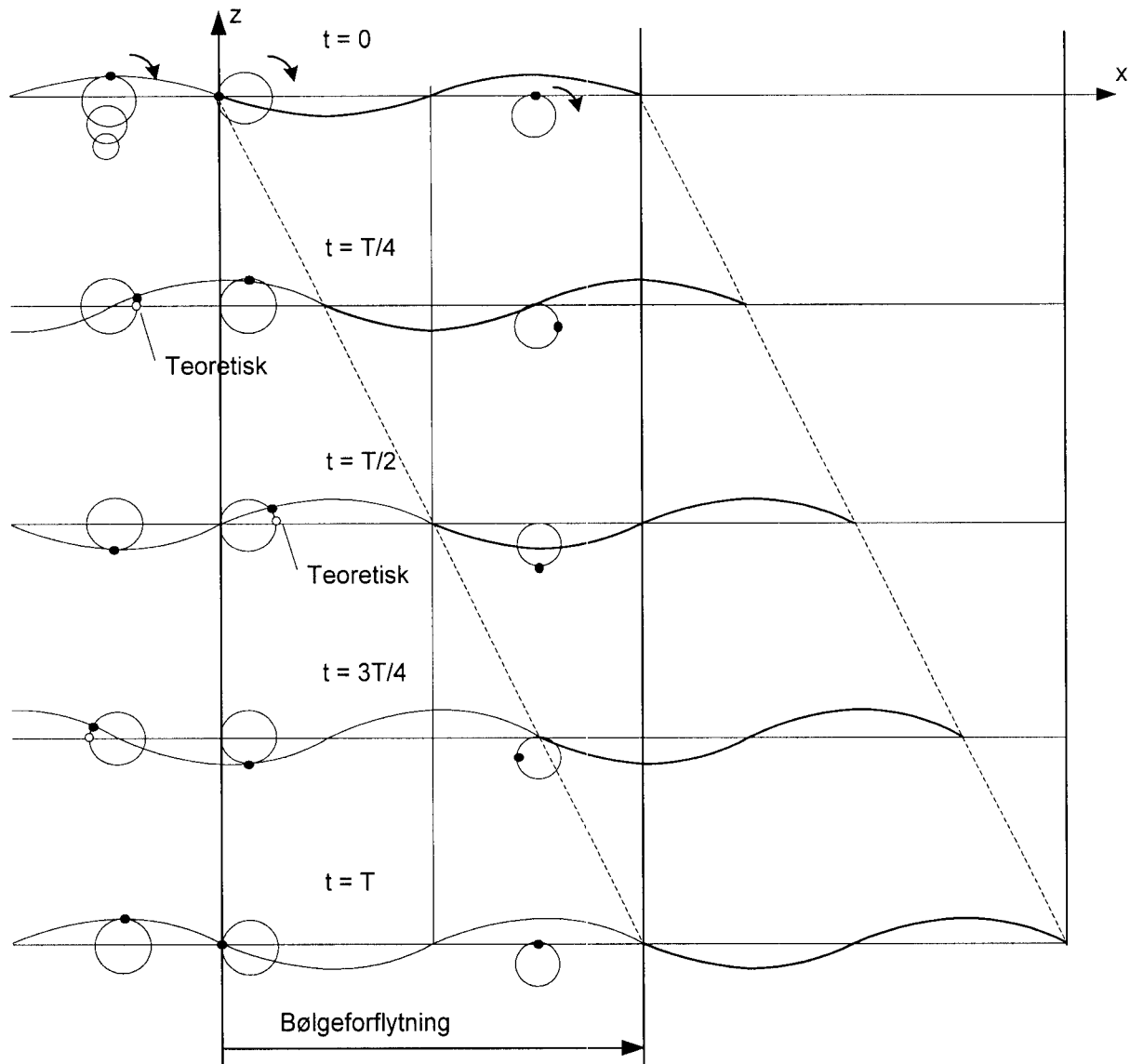


Fig. 2.2-6: Partikkelforflytning vs. bølgeposisjon

Sammenholder vi hvorledes partikkelbevegelse og overflatebevegelse blir hver for seg, ser vi avvik ved enkelte tidspunkt ("hvite" partikler angir teoretisk posisjon). Det synes som om partiklene forlater overflaten. Dette er ikke reelt. Den opptegnede bølgen har en bratthet på grensen til bryting, og oppfyller dårlig de betingelser som er forutsatt ved utledning av teorien. For lange og lave bølger vil avviket knapt være synlig.

Endelig vanndyp

Velger vi startverdier for partikkelbevegelsene, $x_0 = 0$ og $z_0 = 0$, får vi helt tilsvarende som for dypt vann:

$$\Delta x = \zeta_a \frac{\cosh k(z_0 + h)}{\sinh kh} [1 - \cos(\omega t)] = a [1 - \cos(\omega t)]$$

$$\Delta z = \zeta_a \frac{\sinh k(z_0 + h)}{\sinh kh} \sin(\omega t) = b \sin(\omega t)$$

Det er altså bare «amplitydene» som er annerledes enn for dypt vann. Siden $a \neq b$ beveger partiklene seg da i ellipser, og ikke i sirkler.

Anta et vanndyp lik $h = L/3$ (dette er minste havdyp hvor lineær bølgeteori anbefales brukt). Ved overflaten blir:

$$z_0 = 0: \quad a = \zeta_a \frac{\cosh k(0 + h)}{\sinh kh} = \zeta_a \frac{\cosh(\frac{2\pi}{L} \cdot \frac{L}{3})}{\sinh(\frac{2\pi}{L} \cdot \frac{L}{3})} = \frac{4.122}{3.999} = 1.031 \cdot \zeta_a$$

$$b = \zeta_a \frac{\sinh k(0 + h)}{\sinh kh} = 1 \cdot \zeta_a$$

Ved bunnen blir:

$$z_0 = -h: \quad a = \zeta_a \frac{\cosh k(-h + h)}{\sinh kh} = \zeta_a \frac{\cosh(0)}{\sinh(\frac{2\pi}{L} \cdot \frac{L}{3})} = \frac{1}{3.999} = 0.25 \cdot \zeta_a$$

$$b = \zeta_a \frac{\sinh k(-h + h)}{\sinh kh} = 0$$

Ellipsen er altså tilnærmet sirkelformet ved overflaten, men blir sterkt elliptisk nedover, fordi høyden i ellipsen (b) går mot null ved bunnen. Ved bunnen beveger partiklene seg kun horisontalt.

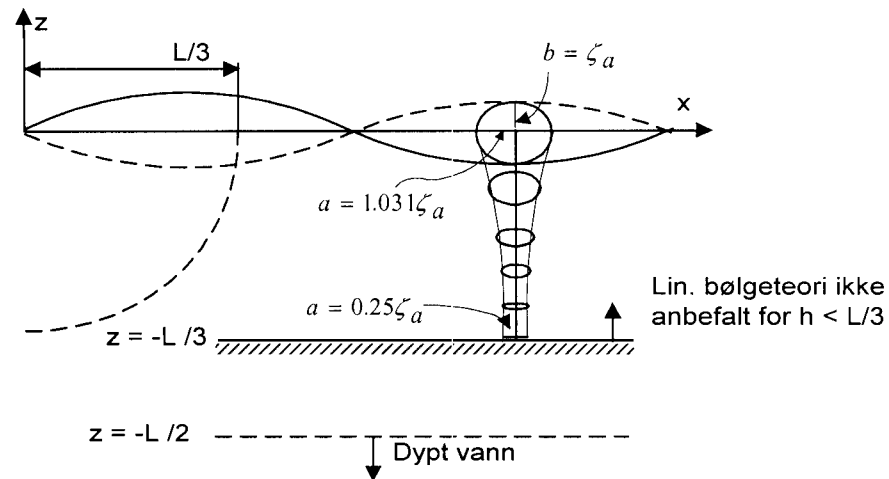


Fig.2.2-7: Dybdens innvirkning på partikkelbanene på endelig vanndyp

2.2.6.4 Spesielle forhold ved overflaten

- kommer ...

2.2.6.5 Virkeligheten

- kommer ...

2.2.7 Potensialkurver

Hastighetspotensialet for dypt vann er altså:

$$\phi = \frac{\zeta_a g}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx)$$

Vi kan fremstille dette grafisk i rommet, som funksjon av x , for ulike verdier av z mellom $z = 0$ og $z = -L/2$ (større dyp er uinteressant, siden $\phi \approx 0$ ved $z = -L/2$). Vi velger tidspunkt $t = 0$. Vi får da kurver som i prinsippet blir som vist i Fig. 2.2-8:

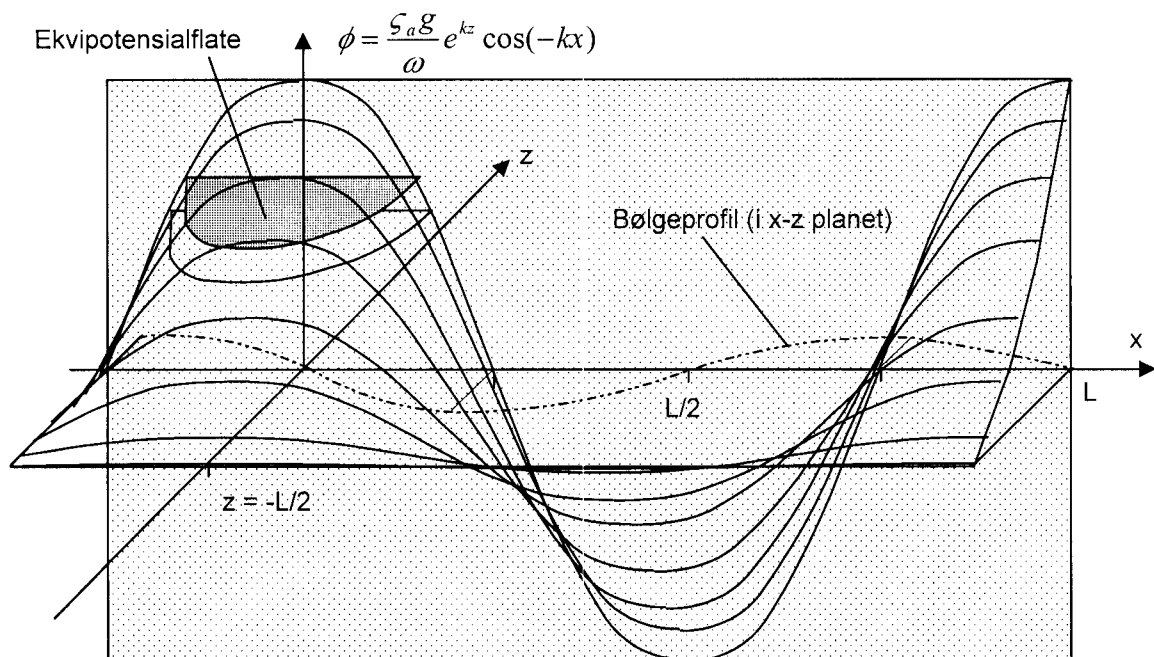


Fig. 2.2-8: Grafisk fremstilling av hastighetspotensialet ved $t = 0$
(sett "oppigjennom" overflaten)

Hastighetspotensialet er her fremstilt som en overflate. Horisontale snitt vil danne linjer hvor verdien av hastighetspotensialet er konstant (ekvipotensiallinjer), akkurat som på kotekart. Vi ser at dersom vi forflytter oss i x - retning, vil verdien av hastighetspotensialet endre seg. Denne endringen gir (i prinsippet) partikkelhastigheten i x - retning. Tilsvarende finnes partikkelhastighet i z - retning ved å bevege seg i z - retning.

Dette anskueliggjør hva hastighetspotensialet er for noe. Utover dette har tegningen ingen praktisk anvendelse. I beregningssammenheng brukes selvfølgelig de utledede formlene for hastigheter etc. direkte.

Det er ikke bare hastigheter som avledes av hastighetspotensialet, men også dynamisk trykk, som uttrykt i Eulers trykkligning. Dette skal vi ta opp i kap. 2.2.8.

2.2.8 Strømlinjer

Vi har sett at partiklene i bølger beveger seg (i følge teorien) i lukkede sirkler eller ellipser. Dette er partiklenes (tilnærmet) virkelige baner som funksjon av tiden. Dersom vi «fryser» bølgen ved et gitt tidspunkt kan vi fremstille *strømlinjene*, som pr. def. er linjer som ligger parallelt med hastighetsvektorene i væsken. I ikke-stasjonær strøm er disse ulike partikkelbanene.

Vi har tidligere (kap.1.2.2) sett at partikkelhastigheter også kan uttrykkes ved strømfunksjonen:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Dvs. at strømfunksjonen finnes som:

$$\psi = \int u dz$$

Setter vi inn uttrykket for u (dypt vann), får vi:

$$\begin{aligned} \psi &= \int \zeta_a \omega e^{kz} \sin(\omega t - kx) dz \\ &= \frac{\zeta_a \omega}{k} e^{kz} \sin(\omega t - kx) + C \end{aligned}$$

ψ må være null på dypt vann, siden vi ikke har partikkelbevegelser der. Dvs. at konstanten C må være lik null.

Innsetter vi frekvensrelasjonen for dypt vann ($k = \frac{\omega^2}{g}$), og «fryser» bølgen på ved $t = 0$, blir strømfunksjonen:

$$\psi = \frac{\zeta_a g}{\omega} e^{kz} \sin(-kx) = \psi_0 e^{kz} \sin(-kx)$$

Strømfunksjonen er konstant langs strømlinjene (se kap.1.1.2). Vi kan framstille linjer for konstante verdier av strømfunksjonen, ved å velge verdier for ψ mellom min. (0 ved $z = -\infty$) og max. ($\zeta_a g / \omega$ ved $z = 0$), og så beregne x for ulike z -verdier.

Løser vi strømfunksjonen mhp. x , får vi:

$$\begin{aligned} \sin(-kx) &= \frac{\psi}{\psi_0} e^{-kz} \\ \Rightarrow x &= -\frac{L}{2\pi} a \sin\left(\frac{\psi}{\psi_0} e^{-kz}\right) \end{aligned}$$

La oss som eksempel se på strømlinjen som går gjennom $z = -L/2$, ved $x = -L/4$. Langs denne linjen skal strømfunksjonen ha følgende konstante verdi:

$$\psi = \psi_0 e^{-\frac{2\pi L}{L} \sin(-\frac{2\pi}{L}(-\frac{L}{4}))} = \psi_0 e^{-\pi} \sin(\frac{\pi}{2}) = \psi_0 e^{-\pi}$$

Vi beregner noen x -koordinater ved følgende dyp:

$$z_1 = 0: \Rightarrow x = -\frac{L}{2\pi} a \sin\left(\frac{\psi_0 e^{-\pi}}{\psi_0} e^0\right) = -\frac{L}{2\pi} a \sin(e^{-\pi}) \approx 0 \pm n \frac{L}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$z_2 = -L/4: \Rightarrow x = -\frac{L}{2\pi} a \sin\left(\frac{\psi_0 e^{-\pi}}{\psi_0} e^{-\frac{2\pi}{L}(-\frac{L}{4})}\right) = -\frac{L}{2\pi} a \sin(e^{-\frac{\pi}{2}}) = -0.033L \pm n \frac{L}{2}$$

$$z_3 = -L/2: \Rightarrow x = -\frac{L}{2\pi} a \sin\left(\frac{\psi_0 e^{-\pi}}{\psi_0} e^{-\frac{2\pi}{L}(-\frac{L}{2})}\right) = -\frac{L}{2\pi} a \sin(e^0) \approx -\frac{L}{4} \pm n \frac{L}{2}$$

Gjør vi tilsvarende for andre verdier av strømfunksjonen, og tegner opp strømlinjene sammen med bølgeprofilen, får vi i prinsippet som vist i Fig.2.2-9:

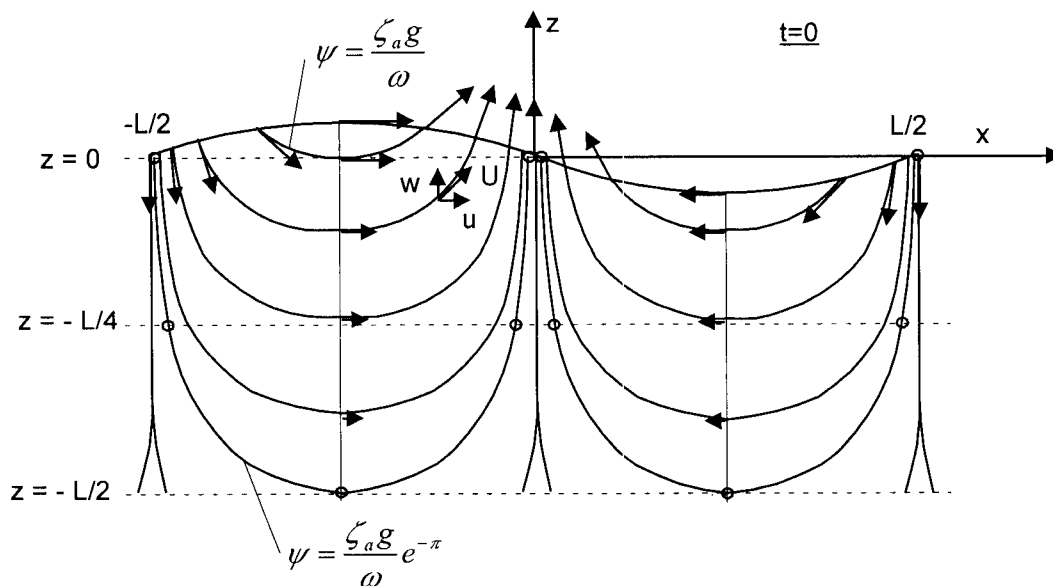


Fig. 2.2-9: Strømlinjer i bølge "frosset" ved $t = 0$. Hastighetsvektorene ligger tangentielt til linene, men følger dem ikke

Strømfunksjonen er som nevnt konstant langs strømlinjene, men slik er det ikke for størrelsen på hastighetsvektorene. Hastighetsvektorene ligger som tangenter til strømlinjene, men har ulik størrelse i hvert punkt. **NB: partiklene beveger seg ikke langs strømlinjene (de går jo i sirkler).**

Strømfunksjonen og hastighetspotensialet er nokså like rent matematisk, og begge kan brukes til å beregne hastighetskomponentene. De har likevel en ulik hensikt og anvendelse.

Strømlinjer er visualisert i laboratorium, som vist i Fig.2.2-10.

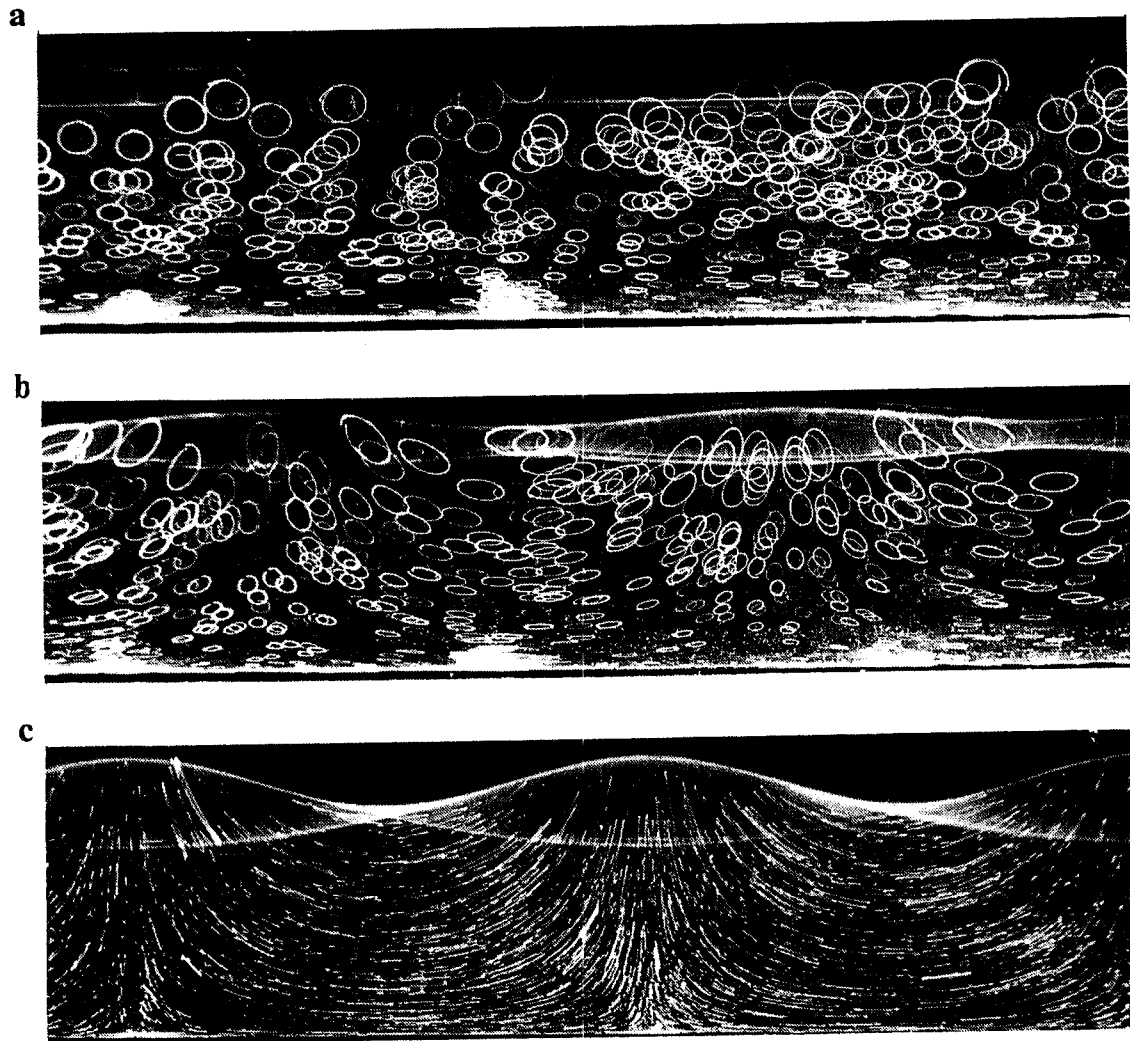


Fig.2.2-10: Visualisering av partikkelbaner på endelig dyp: **a** - plan progressiv bølge; **b** - delvis reflektert bølge; **c** - stående bølge (fullt reflektert bølge). Vi ser (av a) at teori og virkelighet stemmer godt (bølgebrattheten er ukjent, men er sikkert lav). Med økende grad av refleksjon går partikkelbanene over til å bevege seg frem og tilbake langs baner som minner mye om strømlinjene ved et visst tidspunkt til en progressiv bølge (Figuren er hentet fra Marine Hydrodynamics, av J.N.Newman)

2.2.9 Energi i bølger

Energi er *evne til å utføre arbeid*. Generelt er der tre typer energi i bølger: trykenerg, potensiell (stillings-) energi, og kinetisk (bevegelses-) energi (vi ser bort fra termisk energi). Dette er bare det som er indirekte uttrykt i Eulers trykkligning:

$$p = p_0 - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho U^2 - \rho g z \quad [\text{N/m}^2]$$

Vi skal se på energi i bølger, og setter derfor atmosfæretrykket lik null, $p_0 = 0$. Ser vi på et volum med enhetsbredde, $dV = dx \cdot dz \cdot 1$, kan vi uttrykke ligningen over på energiform ved å multiplisere begge sider av ligningen med dV :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= -\rho dV \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho dV U^2 - \rho dV g z \\ &= -dM \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} dM U^2 - dM g z \end{aligned} \quad [\text{Nm}]$$

Vi skal se på størrelsen på hvert av de tre leddene i ligningen over, pr. bølgelengde (med enhetsbredde). Vi antar i utgangspunktet dypt vann.

Trykenerg

Den dynamisk trykenergien til delmassen $dM = \rho \cdot dx \cdot dz \cdot 1$ er gitt ved:

$$dE_d = dM \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho dx dz g \zeta_a e^{kz} \sin(\omega t - kx)$$

Vi velger tidspunkt $t = 0$. Over en bølgelengde over hele havdypet, blir trykenergien da:

$$E_d = \rho g \zeta_a \int_{-\infty}^0 e^{kz} dz \int_0^L \sin(-kx) dx$$

Siden

$$\int_0^L \sin(-kx) dx = \frac{1}{k} \cos(-kx) \Big|_0^L = \frac{1}{k} [\cos(-\frac{2\pi}{L} L) - \cos(0)] = 0$$

blir

$$\underline{E_d = 0}$$

Dynamisk trykenerg over en bølgeperiode er null, dvs. at trykket ikke utfører et netto arbeid over en bølgelengde, eller en bølgeperiode. Tilført trykenerg over bølgetoppen, er like stort som levert trykenerg over bølgedalen.

Dette er helt analogt med hva som skjer når vi spenner opp en fjær. Lar vi fjæren gå tilbake til utgangspunktet ved å slippe kraften opp kontrollert (etter samme kurve som vi strekte den), vil netto arbeid bli null. Vi får igjen det arbeidet vi tilførte.

Det er klart at dynamisk trykk gir dynamiske krefter, som bla. setter flytende konstruksjoner i bevegelse. Trykkenergien omsettes da til bevegelsesenergi og stillingsenergi som tilføres fartøyet. Selv om fartøyet beveger seg, vil det ikke utføre noe netto arbeid dersom det ikke er noen form for dempning. Et flytende legeme på stille vann kan settes i frie svingninger ved at det presses ned og slippes. Dersom dempningen er null, vil legemet fortsette å svinge med samme utslag. Det utfører intet netto arbeid pr. svingeperiode. Dempes bevegelsen etterhvert, må det svingende legemet ha utført et arbeid. Det netto utførte arbeidet må da være direkte knyttet til størrelsen på dempningen. Dempningen vil dels være en følge av at det dannes bølger som går ut fra det svingende legemet (såkalt potensialdempning, fordi det kan beskrives ved potensialteori), og dels være en følge av hvirvler som dannes (såkalt viskøs dempning, som skyldes vannets friksjon). Hvilken type dempning som dominerer, er avhengig av legemets form. Disse sakene skal vi komme tilbake til.

Bevegelsesenergi

Hastighetsenergien til en delmasse i bølgen, er:

$$dE_k = \frac{1}{2} dMU^2 = \frac{1}{2} \rho dx dz (u^2 + w^2)$$

Innsettes:

$$u = \omega \zeta_a e^{kz} \sin(\omega t - kx) \quad \text{og} \quad w = \omega \zeta_a e^{kz} \cos(\omega t - kx)$$

- får vi:

$$dE_k = \frac{1}{2} \rho dx dz (\omega \zeta_a e^{kz})^2 \underbrace{[\sin^2(\omega t - kx) + \cos^2(\omega t - kx)]}_{=1} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \zeta_a^2 e^{2kz} dx dz$$

Over en bølgelengde over hele havdypet, blir bevegelsesenergien da:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 \zeta_a^2 \int_{-\infty}^0 e^{2kz} dz \int_0^L dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 \zeta_a^2 \left[\frac{1}{2k} e^{2kz} \right]_{-\infty}^0 L \\ &= \frac{1}{4} \rho \frac{\omega^2}{k} \zeta_a^2 L [e^0 - e^{-\infty}] \\ &= \frac{1}{4} \rho g \zeta_a^2 L [1 - 0] \end{aligned}$$

$$\underline{E_k = \frac{1}{4} \rho g \zeta_a^2 L}$$

Det totale arbeidet blir ikke lik null, fordi kvadratet av hastighetsvektoren er positiv overalt i bølgen.

Stillingsenergi

Vi kan ikke hente energi fra stille vann, dersom vi ikke har et sprang i vannstanden (fra et reservoar til et annet). En bølge har et «kontinuerlig sprang i vannstand», og kan derfor representere potensiell energi.

Dersom vi tenker oss at vi «skjærer av» bølgetoppen, (snur den opp ned) og legger den i bølgebunnen, er vi tilbake til stille vann. Bølgens potensielle energi er proporsjonal med hvor langt ned massen i bølgetoppen har mulighet til å bevege seg. Den kan bevege seg det dobbelte av avstanden ned til stillevannsnivå.

En vannsøyle med enhetsbredde har en grunnflate $dx \cdot 1$. Denne representerer da en delmasse som er (ved $t = 0$):

$$dM = \rho \zeta dx = \rho \zeta_a \sin(-kx) dx$$

Avstanden fra stillevannsnivå til tyngdepunktet i denne delmassen er $\frac{1}{2}\zeta$, mens den altså er det dobbelte, ζ , i forhold til bølgebunnen. Da blir den potensielle energien til delmassen:

$$dE_p = dMg\zeta = \rho g \zeta^2 dx = \rho g \zeta_a^2 \sin^2(-kx) dx$$

Over *en* bølgelengde får vi da følgende potensielle energi (NB: vi integrere likevel bare over bølgens topp, se over):

$$E_p = \rho g \zeta_a^2 \underbrace{\int_{L/2}^L \sin^2(-kx) dx}_I$$

Vi substituerer $u = -kx$, slik at:

$$\frac{du}{dx} = -k \Rightarrow dx = -\frac{1}{k} du$$

$$x = \frac{L}{2} \Rightarrow u = -k \frac{L}{2} = -\frac{2\pi}{L} \frac{L}{2} = -\pi$$

$$x = L \Rightarrow u = -kL = -2\pi$$

Da blir:

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{k} \int_{-\pi}^{-2\pi} \sin^2(u) du \\
 &= -\frac{1}{k} \frac{1}{2} [u - \sin(u) \cos(u)]_{-\pi}^{-2\pi} \\
 &= -\frac{1}{2k} [-2\pi - \sin(-2\pi) \cos(-2\pi) - (-\pi - \sin(-\pi) \cos(-\pi))] \\
 &= -\frac{1}{2k} (-2\pi - 0 + \pi - 0) \\
 &= -\frac{1}{2k} (-\pi) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{L} \\
 &= \underline{\underline{\frac{L}{4}}}
 \end{aligned}$$

Potensiell energi over en bølgelengde (med enhetsbredde) blir dermed:

$$E_p = \rho g \zeta_a^2 I = \underline{\underline{\frac{1}{4} \rho g \zeta_a^2 L}}$$

Total energi

Total bølgeenergi pr. bølgelengde (med enhetsbredde) blir da:

$$\begin{aligned}
 E &= E_d + E_k + E_p = 0 + \frac{1}{4} \rho g \zeta_a^2 L + \frac{1}{4} \rho g \zeta_a^2 L = \underline{\underline{\frac{1}{2} \rho g \zeta_a^2 L}} \\
 (\text{Enhet: } \frac{kg}{m^3} \frac{m}{s^2} m^2 m \cdot \underbrace{1}_{b} &= Nm)
 \end{aligned}$$

Dividerer vi med lengden og enhetsbredden, får vi total energi pr. m²:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \rho g \zeta_a^2} \quad [Nm/m^2]$$

Dette er den energien (pr. m²) som må tilføres vannet for å skape en bølge med amplitude ζ_a (hvor hurtig energien tilføres, effekten, avgjør bølgeperiode, og dermed bølgelengde). I teorien kan denne energien også gjenvinnes.

Energiflux

Energiflux er et uttrykk for hvor mye energi som passerer et vertikalt plan som står normalt på bølgens forplantningsretning, pr. tidsenhet (Nm/s).

På et lite flateelement med enhetsbredde $dz \cdot 1$, virker et trykk p . Partiklene strømmer igjennom flaten med en hastighet u .

Energifluksen blir :

$$dP = F \frac{vei}{tid} = (pdz \cdot 1) \frac{dx}{dt} = pdzu$$

Over en flate (med enhetsbredde) som går uendelig dypt, får vi totalt:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^0 updz \\ &= \int_{-\infty}^0 u \left[-\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho U^2 - \rho gz \right] dz \end{aligned}$$

Her må nødvendigvis ledd to og tre være null, (uferdig).

2.2.10 Trykk i bølger

- kommer neste århundre?

2.2.11 Gyldighet (av lineær bølgeteori)

- kommer neste århundre?

3. ANDRE BØLGETEORIER

- kommer neste årtusen?

FORMLER & DATA

(Ikke alle er nødvendigvis aktuelle)

Vindhastighetsprofilen:

$$U(z, t) = U(z_r, t_r) \cdot \left[1 + 0.137 \cdot \ln\left(\frac{z}{z_r}\right) - 0.047 \cdot \ln\left(\frac{t}{t_r}\right) \right]$$

- hvor: $z_r = 10 \text{ m}$, $t_r = 10 \text{ min}$

Formler for vind- og strømkrefter:

$$F = C \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A$$
$$F = C_e \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A \cdot \phi$$

Morisons ligning:

$$F = C_d \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u \cdot |u| \cdot A + (C_a + 1) \cdot \rho \cdot \dot{u} \cdot V$$

Midlere nuloppkryssingsperiode:

$$T_z = 0.71 \cdot T_p \quad ; \quad T_p = \text{peak-periode}$$

Bølgebratthet:

$$S = \frac{H}{L}$$

I.f.m. vekt av legemer i vann:

$$\frac{W_{\text{luft}}}{W_{\text{vann}}} = \frac{\rho_{\text{legeme}}}{\rho_{\text{legeme}} - \rho_{\text{vann}}}$$

Bøyespenningsformelen:

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y$$

Skjærspenningsformelen:

$$\tau = \frac{V \cdot S}{t \cdot I} \quad - \text{ for rør: } \tau_{\text{max}} = \frac{2 \cdot V}{A}$$

Treghetsmoment for rør:

$$I = \frac{\pi}{4} \cdot (r_y^4 - r_i^4)$$

Statisk moment:

$$S = y_c \cdot A \quad - \text{ areal utenfor snittet, ganger armen til arealets senter}$$

Tettheter:

$$\rho_{\text{luft}} = 1.225 \text{ kg / m}^3$$

$$\rho_{\text{sjø}} = 1025 \text{ kg / m}^3$$

Jevnføringsspenning:

$$\sigma_j = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Flatetregghetsmoment, rektangel: $I = \frac{1}{12} B \cdot H^3$

Steiners sats: $I = I_{\text{lokal}} + e^2 A$

Stavslankhet: $\lambda = \frac{l_k}{i} = \frac{l_k}{\sqrt{\frac{I}{A}}}$ (l_k = knekk lengde)

Redusert slankhet: $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_y}{E}}$ (f_y = flytegrense ; $E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$)

Initialmetasenterradius: $BM = \frac{I}{\nabla}$

Tyngdepunktforskyvning: $GG_1 = \frac{v \cdot a}{\Delta}$

Slakk tank, virtuelt tyngdepunktforskyvning: $GG_{1\text{virt}} = \frac{i \cdot \rho_{\text{væske}}}{\Delta}$

Små krengevinkler: $\tan \phi = \frac{GG_{1\text{horis}}}{GM}$

Rettende arm (stor krenge): $GZ = KY - KG \sin \phi$

Følgende formlene er hentet fra «Håndbok for design og dokumentasjon av åpne merdanlegg» (Marintek 1994), og er sannsynligvis empiriske:

- Justert vindhastighet:

$$U_A = 0.71 \cdot U_{ref}^{1.23} \quad [\text{m/s}]$$

Her justeres referanseshastigheten U_{ref} (10 m.o.h, 10 min. middell) til et nivå og midlingstid som formlene under er basert på.

- Signifikant bølgehøyde:

$$H_s = 5.112 \cdot 10^{-4} \cdot U_A \cdot F_e^{1/2} \quad [\text{m}]$$

Effektiv strøklengde F_e finnes fra figuren under, utfra W/F forholdet

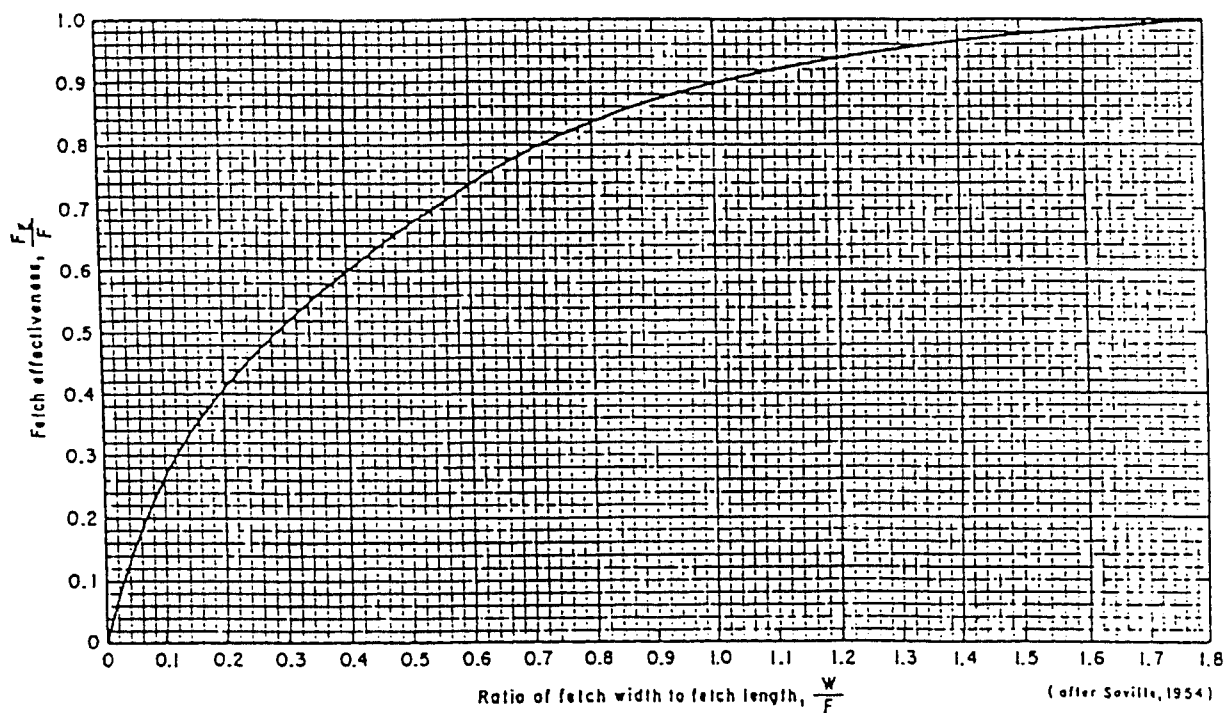
- Bølgespekterets topp-periode:

$$T_p = 0.06238(U_A \cdot F_e)^{1/3} \quad [\text{sek}]$$

Dette ligger nær perioden til de høyeste bølgene.

- Midlere nuloppkryssingsperiode:

$$T_z = 0.71 \cdot T_p$$



Lineær bølgeteori.

	Grundt vann ($d/L < \frac{1}{20}$)	Endelig vann dyp ($\frac{1}{20} < \frac{d}{L} < \frac{1}{2}$)	Dypt vann ($\frac{d}{L} > \frac{1}{2}$)
Hastighetspotensial	$\phi = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos(\omega t - kx)$	$\phi = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos(\omega t - kx)$	$\phi = \frac{ag}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx)$
Sammenheng mellom bølgetall og sirkelfrekvens	$\frac{\omega^2}{g} = k^2 d$	$\frac{\omega^2}{g} = k \tanh kd$	$\frac{\omega^2}{g} = k$
Sammenheng mellom bølgelengde og bølgeperiode	$L = T \sqrt{gd}$	$L = \frac{g}{2\pi} T^2 \tanh \frac{2\pi d}{L}$	$L = \frac{g}{2\pi} T^2$
Bølgeprofil	$\eta = a \sin(\omega t - kx)$	$\eta = a \sin(\omega t - kx)$	$\eta = a \sin(\omega t - kx)$
Dynamisk trykk	$P_d = \rho g a \sin(\omega t - kx)$	$P_d = \rho g a \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \sin(\omega t - kx)$	$P_d = \rho g a e^{kz} \sin(\omega t - kx)$
Horisontal partikkelhastighet	$u = \frac{\omega a}{kd} \sin(\omega t - kx)$	$u = \omega a \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \sin(\omega t - kx)$	$u = \omega a e^{kz} \sin(\omega t - kx)$
Vertikal partikkelhastighet	$w = \omega a \frac{z+d}{d} \cos(\omega t - kx)$	$w = \omega a \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd} \cos(\omega t - kx)$	$w = \omega a e^{kz} \cos(\omega t - kx)$
Horisontal partikkelakselerasjon	$\dot{u} = \frac{\omega^2 a}{kd} \cos(\omega t - kx)$	$\dot{u} = \omega^2 a \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \cos(\omega t - kx)$	$\dot{u} = \omega^2 a e^{kz} \cos(\omega t - kx)$
Vertikal partikkelakselerasjon	$\dot{w} = \omega^2 a \frac{z+d}{d} \sin(\omega t - kx)$	$\dot{w} = \omega^2 a \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd} \sin(\omega t - kx)$	$\dot{w} = \omega^2 a e^{kz} \sin(\omega t - kx)$

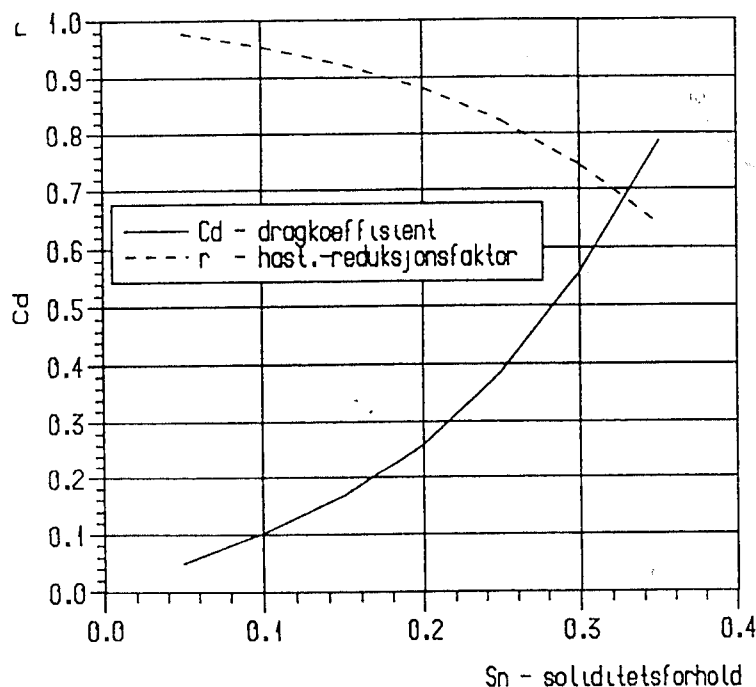
$\omega = \frac{2\pi}{T}$, $k = \frac{2\pi}{L}$
 T = bølgeperiode
 L = bølgelengde
 a = bølgeamplitude
 g = tyngdens akselerasjon
 t = tidsvariabel
 x = forplantningsregning
 z = vertikal koordinat
 z : positiv oppover
 $z=0$: midlere vann-nivå
 d = midlere vann dybde
 Totalt trykk i væsken:
 $P_d = \rho g z + P_0$
 $(P_0 = \text{atmosfæretrykket})$

- Deler notsystemet opp i panel-elementer.
- Bestemmer innspenningsforhold.
- Bestemmer C_D og C_L .
- Bestemmer hastighetsreduksjonsfaktoren r .
- Bestemmer helningsvinkelen på notpanelet.
- Finner drag-krefter på enkle notpaneler.
- Finner løft-krefter på enkle notpaneler.
- Summerer kreftene på notpanelene.

6.2.5 Overslagsberegning av strømkraft på merdsystem, enkel metode

I det følgende gies en enkel metode for beregning av strømkraft på et merdsystem som er basert på resultatene diskutert ovenfor.

Metoden er kun brukbar for strøm på langs og på tvers av anlegget, og gjelder også for helt stive bur. Ved deformasjon av nøtene vil strømkraften overestimeres, men vil likevel gi et brukbart estimat for kreftenes størrelse.



Figur 6,11 Sammenheng mellom soliditet, drag og skyggefaktor.

Sammenhengen mellom soliditet, drag og skyggefaktor er vist i Figur 6,11. Bruken av denne figuren kan forklares som følger:

Gå inn med den aktuelle soliditetsfaktor, S_n , på horisontalaksen til kurven for C_D og les av verdien for C_D på vertikalaksen.

Gå inn med den aktuelle S_n opp til kurven for reduksjonsfaktoren, r , og les av verdien for denne på vertikal-aksen. Dragkraften på tverrpaneler, F_{DT} , og paneler på langs av strømrørningen, F_{DL} , beregnes hver for seg:

$$F_{DT} = 0.5\rho \cdot C_{DT} \cdot U_c^2 \cdot (B \cdot D) \cdot m(1-r^4)/(1-r^2)$$

$$F_{DL} = 0.5\rho \cdot C_{DL} \cdot U_c^2 \cdot (B+2D) \cdot L \cdot m \cdot r^2(1-r^{4n})/(1-r^4)$$

$$F_{Dtot} = F_{DT} + F_{DL}$$

hvor:	ρ	tetthet av vann i kg/m ³
	C_{DT}	dragkonstant for paneler på tvers av strømretningen
	$C_{DL}=0.04$	dragkonstant for paneler på langs av strømretningen
	U_c	strømhastighet i m/s
	B	bredde av notburet i meter
	D	dybde av notburet i meter
	L	lengde av notburet i meter
	n	antall notbur på langs av strømmen
	m	antall notbur på tvers av strømmen.

Om man har beregnet kraft med strøm på langs av anlegget med ovenstående formler, kan man finne kraften på tvers ved å bytte om m og n i formlene. Formlene kan enkelt programmeres på en lommekalkulator, og burde være et enkelt og greit hjelpemiddel for eksempel i forbindelse med vurdering av forankringen for anlegg hvor strømkreftene som en hovedregel gir det største bidraget til forankringskraften. Forøvrig kan sammenhengen mellom S_n , C_D og r som vist i Figur 6,11 også gies som formler:

$$\begin{aligned} S_n &\sim 2d / L_b \\ C_{DT} &= S_n - 1.24S_n^2 + 13.7S_n^3 \\ r &= 1.0 - 0.46C_D \end{aligned}$$

hvor

d er tråddiameteren
 L_b er halvmaskevidden.

6.2.6 Oksygeninnhold i oppdrettsanlegg

For åpne merdanlegg er det strømmen av vann gjennom merdene som skal sørge for den nødvendige tilførsel av oksygen som trengs for å opprettholde fiskens normale livsfunksjoner. I tillegg skal vannstrømmen frakte bort avfallsstoffer og sørge for "trivselsstrøm" for å gi fisken mosjon. Med tanke på oksygentilførsel og egenforurensning må anlegg på lokaliteter med dårlige strømforhold eller anlegg med mange merder tett inntil hverandre vurderes ut fra slike forhold.

Ved å ta utgangspunkt i oksygenbalansen i et lukket kar, men korrigere for at vannhastigheten reduseres gjennom et anlegg med flere merder og at fisken forbruker oksygen i hver merd slik at vann med stadig lavere oksygeninnhold blir ført videre med

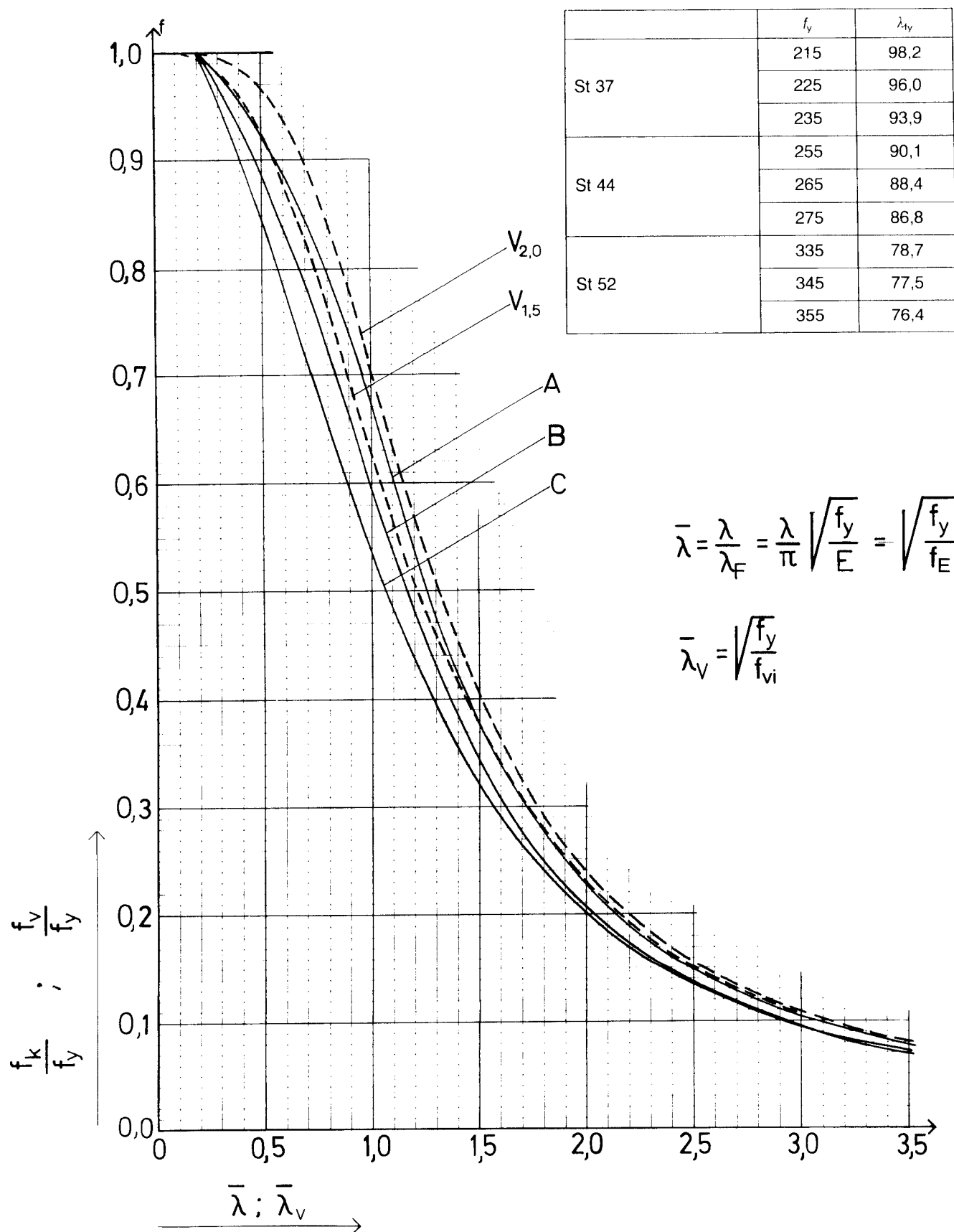


Fig. 5.4.1 a Knekkingskurver